

UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS - UFR Science
Ecole Doctorale de Sciences Fondamentales et Appliquées

Mémoire présenté en vue de l'obtention de

L'Habilitation à Diriger des Recherches

Mention : PHYSIQUE

par

Yannick PONTY

Rôle de la turbulence sur l'effet dynamo et l'induction magnétique

préparée à l'Observatoire de la Côte d'Azur

soutenue le 31 janvier 2012

Jury :

Rapporteurs : Marc Etienne BRACHET - Laboratoire de Physique Statistique,
École Normale Supérieure de Paris
Philippe CARDIN - ISTERre, Université de J-Fourier Grenoble
Peter FRICK - Institute of Continuous Media Mechanics
Perm, Russie

Président : Richard PASQUETTI - Université de Nice-Sophia Antipolis,
Laboratoire J. A. Dieudonné

Examineur : François DAVIAUD - CEA Saclay

Invitée : Annick POUQUET - NCAR, Boulder USA

Remerciements

Je commencerai par remercier très chaleureusement Annick Pouquet, qui n'a cessé de me soutenir depuis que j'ai mis un pied à l'Observatoire de la Côte d'Azur en 1991 en stage de maîtrise. Elle a été surtout un guide après ma thèse (1997) pour me mettre en relation avec la communauté française de la magnétohydrodynamique (MHD) et de la dynamo. Ce qui m'a grandement aidé pour la construction mon projet de recherche pour postuler au CNRS. En tant que directeur du laboratoire Cassini, elle a été un soutien pour ma candidature et elle est donc à l'origine de ma carrière. Elle m'a fait découvrir un métier, une passion, une éthique que je transmettrai aux plus jeunes générations. J'ai aussi découvert une relation d'amitié qui va bien au delà du travail.

Je tiens à remercier très chaleureusement Hélène Politano qui a été mon maître de stage en rentrant au CNRS pendant les 18 mois légaux et qui m'a surtout accompagné dans de nombreux travaux et pendant ces 10 dernières années. Nous étions soudés dans une équipe commune et avons tout partagé : les financements, les difficultés et les bons moments de la vie d'un laboratoire. Je ne peux que regretter qu'elle change de colline en janvier. Mais je sais que nous partagerons encore beaucoup de moments et de projets en communs.

Je tiens à remercier très chaleureusement J-F Pinton, pour son soutien permanent et les très enrichissantes discussions que nous avons eues lors de mes années post-docs, années de transition qui sont souvent difficiles avant l'obtention d'un poste permanent. Je le remercie aussi des années de collaborations fructueuses, il est co-auteur de 6 publications sur 8 que j'ai choisi pour ce mémoire d'HDR. Il y a eu aussi beaucoup de moments hors travail très chaleureux et d'amitiés qui font la richesse de notre profession.

Je remercie les membres du jury pour avoir examiné et expertisé ce mémoire, d'accepté de participer à ma soutenance (même si cela a produit du CO₂).

Ces travaux de thèse ont été effectués en équipe, ce sont les rapports humains et l'addition de compétences qui font une des richesses de notre métier. Je remercie mes collaborateurs pour les bons moments passés sur cette recherche (A. Pouquet, P. Minnini, D. C. Montgomery, H. Politano, A. Alexakis, J. Baerenzung, J-F Pinton, B. Dubrulle, F. Daviaud, J.-P. Laval et F. Plunian) . Même s'ils n'apparaissent pas dans les travaux que j'ai sélectionnés, je remercie mes autres collaborateurs, notamment Andrew D. Gilbert et Andrew M. Soward pendant les 3 années de post-doctorat en Angleterre et les années suivantes. Je remercie «Andy» (AMS) pour les superbes routes d'escalade que nous avons partagées ensemble.

D'une façon générale, un chercheur ne peut pas être isolé, et ses collaborations se tissent au fur et à mesure des rencontres et des projets. Il va créer son propre réseau. Le «social network» de cette thèse et mes connections de ces dix dernières années, s'appelle «FaceNice» et je vous invite à le visualiser (voir Fig. 1).

Je remercie Patrick Michel collègue de l'Observatoire, et ami. Nous partageons notre bureau depuis plus de dix ans, ainsi que nos joies et nos difficultés. Je souhaite que cela continue encore des années.

Je remercie Alain Miniussi, pour son aide apportée sur mon code numérique et de m'avoir fait découvrir le monde du génie logiciel et de la programmation objets, ainsi pour notre collaboration actuelle sur «notre» code numérique qu'il a complètement re-construit.

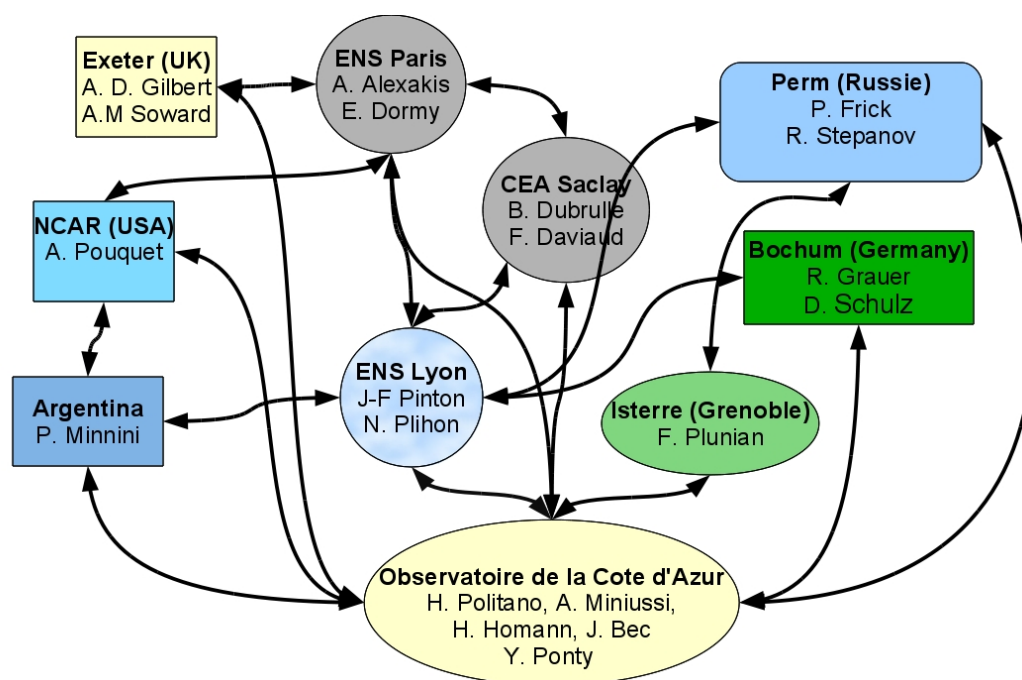
Je remercie les directeurs et directeurs adjoints successifs des laboratoires Cassini et Cassiopée pour leurs aides apportées pour effectuer mes recherches (A. Pouquet, H. Frisch, A. Bijaoui, H. Politano, F. Thevenin, T. Passot et E. Slesak), ainsi que les personnels administratifs toujours présents et extrêmement efficaces (I. De Angelis, S. Szeles, S. Golleto, R. Pinto, M. Dellapina).

Je remercie tout les collègues de mon équipe Turbulence Fluide et Plasma et ainsi que les collègues travaillant au PHC pour les bons moments passés dans ce beau bâtiment qui a une histoire et une âme. Je remercie les membres de l'OCA et ses directions successives qui m'ont accompagné ces dernières années, notamment les membres du service informatique et du mésocentre qui sont des services essentiels pour un numéricien.

Je remercie mes collègues et amis avec qui j'ai eu la chance de faire des activités sportives (ski, escalade et via ferrata). Ce sont des moments de vie et de partages qui enrichissent l'âme.

Une partie de cette thèse à été écrite à l'hôpital et en convalescence, et finalement a pu exister grâce une chaîne de secours (pompiers, médecins, policiers), de chirurgiens et d'infirmières, d'aides soignantes particulièrement compétents. Je les remercie pour leur sérieux, leur professionnalisme et leur gentillesse qu'ils m'ont accordé et qui font honneur au service publique. Je rajouterai un mot pour remercier Mireille Moulin qui a passé son examen d'infirmière de fin stage pendant mon traitement à l'hôpital St Roch à Nice, et lui dire que vu son sérieux et sa gentillesse, elle fera bientôt partie des meilleures infirmières de la région. Je remercie également mon kinésithérapeute Thierry Alfocea qui a tout fait pour me remettre sur pied.

Je finis en remerciant toute ma famille qui m'a soutenu et aimé pendant toutes ces années et je dédie cette thèse à mes très proches Julien, Florian et Annick Ponty.



Social Network : FaceNice

FIGURE 1 – NiceFace, est le «Social Network» de mes collaborations de ces dix dernières années, ainsi que leurs connexions respectives.

Préambule

Après ma thèse de doctorat en 1997, je suis parti en Angleterre à l'Université d'Exeter comme postdoctorant dans le Département de Mathématiques Appliquées. En octobre 2000, j'ai obtenu un poste de chargé de recherche au CNRS en section 10, dans le laboratoire Cassini à l'Observatoire de la Côte d'Azur. J'ai travaillé plus de 10 ans sur l'effet dynamo, la magnétohydrodynamique, l'instabilité convective en rotation et aussi la mise au point de techniques numériques pour la simulation sur des architectures d'ordinateurs parallèles et maintenant massivement parallèles.

Dans ce manuscrit d'Habilitation à Diriger les Recherches, j'ai choisi uniquement 8 publications qui sont sur un thème bien précis : «Le rôle de la turbulence sur le seuil de la dynamo et l'induction magnétique» (Annexe B). Dans la partie scientifique, les travaux et leurs contextes sont commentés pour finir sur une discussion et des perspectives (chap. 1-7).

Devant chaque article de l'Annexe B, j'ai noté des souvenirs personnels «the unrevealed story». J'ai pris du plaisir à écrire ces anecdotes. J'espère que les protagonistes concernés ou non en auront aussi à les lire.

J'ai aussi décidé de rédiger une longue Annexe A sur les méthodes numériques et les diagnostics qui ne sont généralement pas expliqués dans les publications. Cette annexe servira aux étudiants et débutants en numériques.

Voici la liste des publications qui n'ont pas été sélectionnés, mais qui font partie de mon travail de l'après Thèse de Doctorat.

- A. D. Gilbert, Y. Ponty, V. Zheligovsky "Dissipative structures in a nonlinear dynamo" *Geoph. Astroph. Fluid. Dyn.* 1-25 (2010).
- J. Baerenzung, P.D. Mininni, A. Pouquet, H. Politano, and Y. Ponty. "Spectral Modeling of Rotating Turbulent Flows" *Physics of Fluids*, **22(2)** 025104-025113 (2010).
- J. Baerenzung, H. Politano, Y. Ponty, A. Pouquet "Spectral Modeling of Magnetohydrodynamic Turbulent Flows" *Phys. Rev. E* **78**, 026310 (2008).
- J. Baerenzung, H. Politano, Y. Ponty, A. Pouquet, "Spectral Modeling of Turbulent Flows and the Role of Helicity" *Phys. Rev. E* **77**, 04303 (2008).
- A. Courvoisier, A. G. Gilbert, & Y. Ponty, "Dynamo action in flows with cat's eyes" *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, Vol. **99**, No. 5, pp 413-429 October (2005).
- Y. Ponty, A.D. Gilbert & A.M. Soward "The onset of thermal convection in Ekman–Couette shear flow with oblique rotation" *J. Fluid Mech.* (2003).
- Y. Ponty, A.D. Gilbert & A.M. Soward "Kinematic dynamo action in large magnetic Reynolds number flows driven by shear and convection" *J. Fluid Mech.* **435**, 261-287 (2001).
- A.D. Gilbert, and Y. Ponty, "Slow Ponomarenko dynamos on stream surfaces." *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn* **93**, 55-95 (2000).
- Yannick Ponty, "Numerical modeling of liquid metal dynamo experiments." In : Ph. Cardin, L.F. Cugliandolo, editor(s), Les Houches, Session LXXXVIII, 2007, Dynamos. Amsterdam : Elsevier, p. 359-382 (2008).
- A. Pouquet, J. Baerenzung, J. Pietarila Graham, P. Mininni, H. Politano, and Y. Ponty, "Modeling of anisotropic turbulent flows with either magnetic fields or imposed rotation",

Proceedings of the TI2009 Conference in "Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multi-disciplinary Design," Springer ;

- Y. Ponty, A.D. Gilbert & A.M. Soward "Dynamo action due to Ekman layer Instability" *P. Chossat et al. ed* , Dynamo and Dynamics, a Mathematical Challenge Kluwer Academic Publishers, 75-82 (2001).
- A.M. Soward , A. Bassom & Y. Ponty "Alpha-Quenched α^2 Ω -Dynamo waves in stellar shells" P. Chossat et al. ed , Dynamo and Dynamics, a Mathematical Challenge *Kluwer Academic Publishers*, 297-304 (2001).

Table des matières

1	Introduction	1
2	Induction magnétique	3
2.1	Introduction	3
2.2	De l'expérience au numérique	4
2.3	Des résultats prometteurs	4
2.4	Perspectives	5
3	Seuil linéaire et champ moyen	7
3.1	Introduction	7
3.2	La course aux faibles nombres de Prandtl magnétiques	8
3.3	Effet du champ de vitesse moyen	8
3.4	Perspectives	10
4	Forçage de Taylor-Green et effets non linéaires	13
4.1	Régime de Saturation	13
4.2	Branches sous-critiques et cycles d'hystérésis	14
5	Dynamo intermittente	17
5.1	Introduction	17
5.2	Et la force de Lorentz dans tout ça?	18
6	Dynamo à petite et grande échelle	21
6.1	Introduction	21
6.2	Dynamo de G.O Roberts et fluctuations de vitesse	22
6.3	Loin du seuil	24
6.3.1	Tueur de mode et Dynamo de fluctuation	24
7	Discussions et perspectives	29
7.1	Discussions	29
7.1.1	Dynamo de champ moyen et de fluctuation	29
7.1.2	Effet des conditions aux limites magnétiques	32
7.1.3	Hypothèse d'une dynamo Fluide-Structure	33
7.2	Perspectives	34
7.2.1	Effet des parois et conditions aux limites magnétiques	34
7.2.2	Utilisation de traceurs lagrangiens pour une étude des diffé- rentes phases de la dynamo	35

A	Méthodes numériques et diagnostics	37
A.1	Méthodes pseudo-spectrales	38
A.1.1	Boîte Périodique	40
A.1.2	Schéma temporel et déaliasing	40
A.2	Équations fondamentales	41
A.2.1	Équation de base	41
A.2.2	Les Forçages	42
A.2.3	Nombres sans dimension	45
A.3	Modèle de turbulence sous mailles	46
A.4	diagnostics	48
A.4.1	Quantités globales	48
A.4.2	Spectres uni-dimensionnel	49
A.4.3	Résolutions : Cauchemar sur la grille	50
A.4.4	Sondes	53
A.4.5	Visualisation tri-dimensionnelle	54
A.4.6	Moyenne temporelle et champ moyen	55
A.5	Parallélisation	56
A.5.1	Penser Parallèle	58
A.5.2	Entrées-Sorties en Parallèle (MPI-IO)	58
A.5.3	Découpage de la grille, FFT et optimisation	59
A.6	Stratégie parallèle pour les diagnostics et l'interactivité de codes multi-physiques	61
A.7	Outils d'aide à la programmation	62
A.7.1	Trac et subversion (svn)	62
A.7.2	Cmake, compilation automatique	65
A.7.3	tests Automatiques	67
A.8	Perspectives	68
B	Publications	71
B.1	Induction Magnétique	72
B.1.1	Notes personnelles	72
B.2	Dynamo et Seuil	77
B.2.1	Notes personnelles	77
B.3	Seuil et champ moyen	82
B.3.1	Notes personnelles	82
B.4	Forçage de Taylor-Green et effets non-linéaires	94
B.4.1	Notes personnelles	94
B.5	Bifurcation sous critique	106
B.5.1	Notes personnelles	106
B.6	Dynamo intermittentes	112
B.6.1	Notes personnelles	112
B.7	Tous ensembles	120
B.7.1	Notes personnelles	120
B.8	Dynamo à grande et petite échelle	129

Table des matières	ix
<hr/>	
B.8.1 Notes personnelles	129
Bibliographie	135
C Titre et Résumé	
Title and Abstract	151

Introduction

L'origine des champs magnétiques est ici abordée par l'effet dynamo, c'est à dire l'amplification spontanée d'un germe magnétique dans des fluides électriquement conducteurs en mouvement, autrement dit l'auto amplification du champ magnétique due à l'étirement de ses lignes de champ par un écoulement. Cet effet est considéré comme le mécanisme principale de la génération des champs magnétiques des objets astrophysiques (voir les livres [Moffatt 1978, Krause 1980a, Parker 1979, Robert 1967, Dormy 2007, Cardin 2008]). Depuis de nombreuses années, plusieurs projets de dynamos expérimentales ont vu le jour tant en France qu'à l'étranger. Deux projets de dynamo expérimentales (Riga (novembre 1999 et juillet 2000) et Karlsruhe (décembre 1999) ont obtenu un effet dynamo dans des écoulements hélicitaires contraints dans des tubes, présentant un champ de vitesse avec très peu de fluctuations [Gailitis 2000, Gailitis 2001, Gailitis 2004, Müller 2000, Stieglitz 2001]. L'équipe française de Von Kármán Sodium dont l'expérience est basée à Cadarache a essayé d'obtenir l'effet dynamo avec un écoulement fluctuant et turbulent. Plusieurs campagnes d'expériences ont été menées depuis les années 2000, et seuls les phénomènes d'induction avaient pu être étudiés. Mais en septembre 2006, le projet a obtenu ce qui semble être la première dynamo turbulente de l'histoire [Monchaux 2007, Berhanu 2007]. Une moisson de résultats expérimentaux a été obtenue malgré la difficulté des mesures dans les métaux liquides, avec notamment la mise en évidence de riches régimes non-linéaires [Monchaux 2009, Berhanu 2009, Berhanu 2010].

Les simulations numériques qui ont accès à toutes les quantités physiques à tout instant vont donc jouer un rôle important dans la compréhension de l'effet dynamo et de sa saturation. En collaborant directement avec des membres de ces équipes expérimentales et dans un souci permanent de comparer mes simulations et les résultats expérimentaux, je me suis efforcé d'explorer et de comprendre numériquement les propriétés d'un tel système, notamment l'influence de la turbulence sur le seuil critique de l'instabilité dynamo, la relation entre la topologie émergente à grande échelle et les fluctuations à petite échelle, ainsi que les mécanismes de saturation de l'énergie magnétique. Cette étude paramétrique, en nombre de Reynolds cinétique et magnétique nécessite des simulations temporelles longues et des résolutions spatiales élevées pour approcher les régimes turbulents que seuls des codes parallèles peuvent atteindre.

Pour étudier ces processus, en 2001 j'ai construit un code pseudo-spectral qui

permet de calculer l'évolution d'un fluide incompressible neutre ou électriquement conducteur dans un espace périodique tri-dimensionnel sur des plateformes multi-processeurs distribuées en utilisant la bibliothèque MPI (Message Passing Interface). Depuis juin 2008, avec un ingénieur de recherche du mésocentre de calcul intensif local (UNS/OCA), spécialiste en C++ et génie logiciel, nous nous sommes lancés dans une refonte et une amélioration de la structure objet C++ de mon code parallèle. Nous nous efforçons de rendre ce code beaucoup plus dynamique, de créer des objets génériques "template" qui permettront de construire facilement d'autres algorithmes, pour d'autres problèmes ou des équations physiques supplémentaires avec la possibilité d'introduire facilement des optimisations sans modifier la structure du code. La construction de ces outils de simulations et d'analyses et leurs améliorations représentent une partie significative de travail d'un numéricien. Cette activité indispensable sera mise en avant dans ce manuscrit.

Induction magnétique

Sommaire

2.1	Introduction	3
2.2	De l'expérience au numérique	4
2.3	Des résultats prometteurs	4
2.4	Perspectives	5

2.1 Introduction

L'induction magnétique est la première étape vers l'effet dynamo, car c'est l'approche la plus simple pour explorer expérimentalement des phénomènes de magnétohydrodynamique, en étudiant la réponse d'un champ magnétique appliqué à un fluide conducteur (MHD) en mouvement. Cette réponse est d'autant plus intéressante si le système fluide a atteint un régime de turbulence développée qui est généralement présent dans les milieux naturels. Des exemples d'application du phénomène d'induction magnétique en astrophysique sont nombreux, comme par exemple les phénomènes d'induction détectés sur le satellite IO de Jupiter ou le champ magnétique terrestre induit des courants des océans observés à partir des nombreuses données des satellites (CHAMP [Reigber 2005]).

Atteindre un régime à haut nombre de Reynolds magnétique est difficile et coûteux. Il est donc souhaitable de cibler le régime à atteindre pour dépasser le seuil instable, avec une étude préliminaire en regardant la réponse d'un champ magnétique appliqué. Cette étude peut à la fois nous renseigner sur la géométrie des modes les plus instables, et aussi sur le niveau du seuil de l'instabilité. Ces dernières années plusieurs groupes expérimentaux ont fait des avancées dans le domaine des phénomènes d'induction dans des écoulements turbulents. Il y a essentiellement trois géométries expérimentales présentes : l'une produisant un écoulement de Von Kármán entre deux disques munis de plusieurs pales en (co/contra)-rotation [Odier 1998, Bourgoïn 2002, Volk 2006, Bourgoïn 2006, Verhille 2010b], une autre étant une sphère entraînée par deux hélices alignées sur un même axe, pour tourner en (co/contra) rotation [Peffley 2000a, Peffley 2000b, Nornberg 2006b, Nornberg 2006a] et la troisième étant un tore mis en rotation rapide puis freiné brutalement [Frick 2002, Noskov 2004, Stepanov 2006, Noskov 2009]. Dans ces différentes expériences, les différentes géométries des modes magnétiques sont explorées,

ainsi que le taux d’amplification du champ magnétique appliqué. Obtenir la géométrie du champ magnétique induit n’a été possible qu’en utilisant de multiples sondes internes ou externes pour traquer différents modes magnétiques. Ceci a demandé un effort technologique important.

2.2 De l’expérience au numérique

En 2001, nous nous sommes dans un premier temps, comme dans les expériences concentrées sur la réponse induite d’un champ magnétique appliqué afin de pouvoir comparer nos simulations avec les résultats expérimentaux. Nous avons simulé les équations classiques de la MHD (voir Annexe A.2) dans un espace numérique périodique (A.1.1) avec un champ magnétique appliqué introduit dans l’espace spectral sur le mode $(0,0,0)$ sur une des composante du champ magnétique, ce qui représente un champ magnétique moyen traversant la boîte périodique de part en part suivant une direction fixée.

L’écoulement est entretenu par un forçage volumique constant au cours du temps, qui va contraindre la géométrie de l’écoulement et par conséquence le choix des modes magnétiques instables. Nous avons choisi un forçage connu pour produire un effet dynamo [Nore 1997, Nore 2001] et un écoulement dont la géométrie présente de fortes ressemblances avec l’expérience construite à l’ENS Lyon en gallium [Odier 1998]. Ce forçage est l’écoulement de Taylor-Green, déjà utilisé pour explorer le régime de turbulence développée dans une géométrie périodique [Brachet 1983], et aussi plus récemment utilisé pour étudier l’effet dynamo et la MHD [Lee 2010, Krstulovic 2011]. Nous n’avons pas utilisé les propriétés de symétrie de cet écoulement, comme dans les précédentes références, qui permettent de construire un code périodique spécifique utilisant ces symétries en résolvant uniquement une partie du domaine nommée “boîte fondamentale” du Taylor-Green. La spécificité de ces simulations empêche tout mouvement fluide ou des connexions magnétiques entre les différentes boîtes fondamentales qui existe normalement dans un espace périodique. Cette perméabilité entre les différentes boîtes peut engendrer des mouvements fluides à plus grande échelle que celle de la boîte fondamentale et donc aussi des structures magnétiques non permises par le Taylor-Green symétrique. Pour plus d’information sur ce forçage, voir l’annexe A.2.2.

2.3 Des résultats prometteurs

Nous avons donc réalisé des simulations résolvant les équations fondamentales de la MHD incompressible dans un cube périodique en utilisant un code pseudo-spectral parallèle (MPI, que j’ai écrit en C++ (voir Annexe A.5). Afin de pouvoir atteindre des nombres de Reynolds bien plus élevés que les limites permises par les plus grandes grilles de calcul possibles et les temps CPU accessibles, j’ai intégré une modélisation des plus petites échelles turbulentes, à travers la technique Large Eddy Simulation (LES) déjà largement utilisée en hydrodynamique (voir Annexe

A.3). Avec cette modélisation, nous avons pu atteindre de faible nombre de Prandtl magnétique (rapport de la viscosité cinématique et la résistivité magnétique) de l'ordre de 10^{-3} (voir publication Annexe B.1 [Ponty 2004]), pour une comparaison avec les expériences présentant un Prandtl magnétique de l'ordre de 10^{-5} . En imposant un champ magnétique extérieur, nous avons étudié les propriétés statistiques des fluctuations magnétiques, à travers des quantités globales comme l'énergie induite ou les spectres isotropes unidimensionnels, ainsi qu'au travers des quantités locales comme les fluctuations magnétiques en un point de l'espace mimant l'enregistrement d'une sonde. Car ces dernières mesures sont les seules accessibles par les expérimentateurs. Dans ce régime d'induction, les lois d'échelles des petites fluctuations sont régies par l'équilibre entre l'advection du champ imposé et la dissipation ohmique. L'hypothèse de Taylor est applicable, le signal des sondes numériques ou expérimentales retrouvent bien la loi d'échelle du spectre spatial ($k^{-11/3}$) (voir Fig. 2.1). Cependant à basse fréquence, l'hypothèse de Taylor n'est plus applicable car les échelles spatiales déduites de ces fréquences seraient en dehors du dispositif. Nos simulations retrouvent cette loi en fréquence en (f^{-1}) (voir Fig. 2.1), loi d'échelle qui n'a pas de représentation spatiale et qui représente des variations à grande échelle de temps. Cette propriété se révèle aussi sur la quantité globale qu'est l'énergie magnétique avec un spectre temporel en f^{-2} à basse fréquence. Nous avons montré que cette propriété statistique des grandes échelles temporelles par rapport au forçage semble générique, bien qu'elle ne soit pas vraiment encore comprise, ni prédite par la théorie, mais présente dans de nombreuses expériences d'induction magnétique [Bourgoin 2002] et dans les expériences de dynamo [Stieglitz 2001, Gailitis 2004].

2.4 Perspectives

L'induction magnétique est encore largement étudiée expérimentalement. Il y a actuellement une volonté de se rapprocher de situation astrophysique ou géophysique, comme par exemple en étudiant un forçage issu d'instabilités hydrodynamiques écliptiques [Herreman 2009] ou dans une coquille sphérique, comme dans l'expérience «DTS» de Grenoble subissant une forte rotation et un champ magnétique dipolaire interne imposé [Cardin 2002, Nataf 2006, Nataf 2008, Schmitt 2008]. Des dispositifs plus perfectionnés existent sur lesquels l'amplitude du champ imposé est proportionnelle et dynamiquement ajustée en fonction du signal du champ magnétique induit sondé [Verhille 2010, Bourgoin 2006]. Une étude sur l'effet du métal employé pour conduire l'écoulement et ses effets sur l'induction magnétique est également conduite [Verhille 2010b]. En ce qui concerne le comportement à basse fréquence (f^{-1}), un article récent [Dmitruk 2011] propose des explications pour ce comportement. Pour expliquer, reproduire ou interpréter ce phénomène présent dans les expériences de MHD et dans les écoulements naturel, le numérique et la modélisation resteront des outils incontournables.

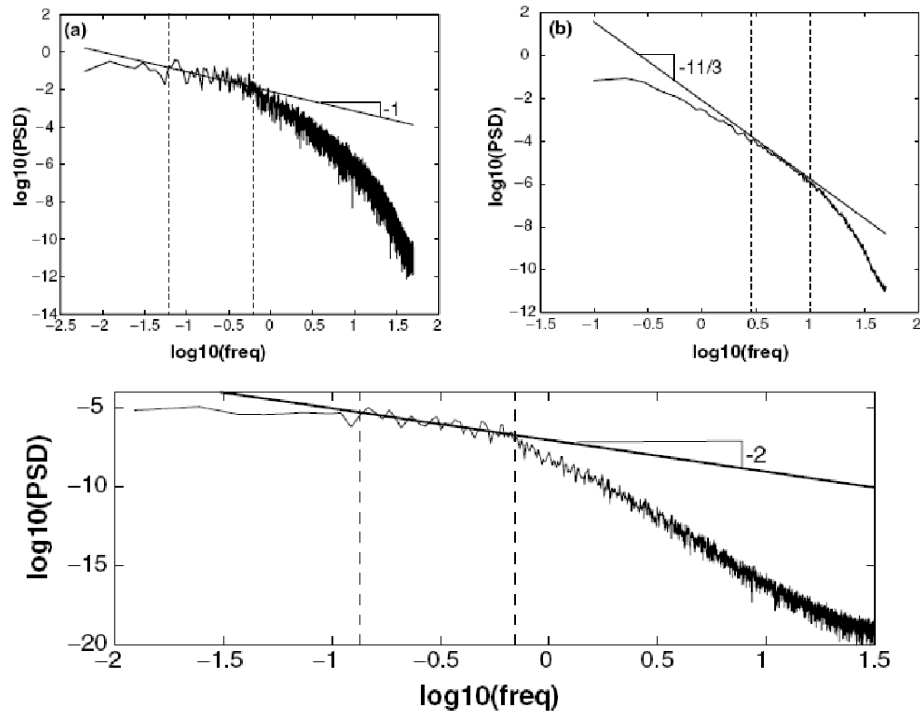


FIGURE 2.1 – Les deux courbes d'en haut représentent la densité spectrale des fluctuations du champ magnétique enregistrées à des positions fixes de l'espace d'intégration comme dans le cas des sondes expérimentales. (a) La "Power spectral density" (PSD) est moyennée avec un temps long qui met en évidence le comportement à basse fréquence et la loi en f^{-1} ; (b) PSD moyennée sur des temps courts qui mettent en évidence le comportement à haute fréquence et la loi en $f^{-11/3}$; En bas, la PSD des fluctuations temporelles de l'énergie magnétique (quantité globale intégrée dans tous l'espace), présente un comportement en f^{-2} .

Seuil linéaire et champ moyen

Sommaire

3.1	Introduction	7
3.2	La course aux faibles nombres de Prandtl magnétiques	8
3.3	Effet du champ de vitesse moyen	8
3.4	Perspectives	10

3.1 Introduction

Dans ce travail, nous avons cherché le seuil de l'instabilité dynamo dans un écoulement entretenu par un forçage de Taylor-Green (Chap. A.2.2.1). L'idée était de regarder l'évolution du seuil en fonction de la turbulence en diminuant la viscosité, et par conséquent en diminuant le nombre de Prandtl magnétique. En 2004, nous étions dans un contexte où la communauté se demandait, s'il était facile, et même possible d'obtenir une dynamo à faible nombre de Prandtl dans un écoulement turbulent. Des études numériques similaires montraient la difficulté de franchir le «mur» du Prandtl magnétique de l'ordre de l'unité (voir Fig. 1 et 2 de [Schekochihin 2005]). Ces simulations utilisaient une force fluctuante δ -corrélée en temps, c'est à dire avec une injection d'énergie appliquée sur des modes à grande échelle de manière aléatoire à chaque pas de temps, donc sans corrélation temporelle. Ce forçage est généralement utilisé pour simuler un écoulement turbulent. Il y avait même des doutes que l'on puisse avoir une convergence du seuil dans la limite à faible nombre de Prandtl magnétique, et donc un plateau, idée argumentée par des résultats théoriques [Boldyrev 2004] dans le cadre du modèle de Kazantsev [Kazantsev 1968]. Nos résultats ont clairement fait avancer cette discussion, notamment en montrant que la nature du forçage peut complètement changer le comportement du seuil. Après nos résultats, nos collègues utilisant le forçage δ -corrélé ont finalement trouvé un plateau dans la limite à faible nombre de Prandtl, en augmentant la résolution et en utilisant des techniques de modélisation sous maille [Schekochihin 2007].

3.2 La course aux faibles nombres de Prandtl magnétiques

Nos études portaient sur la compréhension de l'effet de la turbulence sur le seuil d'apparition de l'effet dynamo. L'approche numérique se concentrait sur l'écoulement engendré par le forçage de Taylor-Green. Nous avons exploré le comportement du seuil de la dynamo en augmentant la turbulence de l'écoulement (en diminuant la viscosité) à travers des simulations numériques directes ou faisant appel à des schémas de modélisation sous maille pour tenter de diminuer les nombres de Prandtl magnétiques accessibles (voir publication de l'Annexe B.2 [Ponty 2005]). Cette limite reste toujours difficile à atteindre, étant donné les faibles valeurs de Prandtl magnétique des métaux liquides $\sim 10^{-5}$. Le premier résultat remarquable que nous avons obtenu est la mise en évidence d'un plateau dans l'évolution du seuil de la dynamo en fonction du nombre de Reynolds cinétique (voir Fig. 1 dans l'Annexe B.2 ou Fig. 3.1). Ce comportement fut confirmé dans la limite à haut nombre de Reynolds cinétique par deux méthodes de modélisation sous maille (voir A.3). Avec ces modélisations, nous avons pu produire une dynamo à un nombre de Prandtl magnétique en dessous de 10^{-2} . A cette époque, les simulations avec un forçage δ -corrélé était loin de montrer un tel comportement du seuil [Schekochihin 2005]. Il faut attendre une résolution bien plus grande et aussi l'utilisation de modèles sous maille pour voir apparaître un plateau (voir Fig 1b de [Schekochihin 2007]). Ce résultat n'a pas encore été confirmé par d'autres équipes.

Notre deuxième résultat, est la mise en évidence que le pic d'énergie du mode dynamo, est à plus petite échelle que l'échelle de l'écoulement et montre un comportement à grand nombre d'onde d'un spectre de «Kazentsef» en $k^{3/2}$, (provenant d'une dynamo de fluctuation engendrée par un écoulement de Kraichnan [Kraichnan 1968]). Nos spectres d'énergie magnétique ne sont finalement pas si différents des spectres obtenus pour des dynamos de fluctuations [Schekochihin 2007].

La grande question était de savoir pourquoi, nous avons atteint la saturation de seuil de la dynamo dans la limite des faibles nombres de Prandtl magnétiques, bien plus facilement que dans le cas d'un forçage δ -corrélé en temps, tout en ayant certaines caractéristiques des dynamos de fluctuation. La solution fut abordée dans une autre publication (Annexe B.3 [Ponty 2007b]) commentée ci-après .

3.3 Effet du champ de vitesse moyen

Tout d'abord, il faut réaliser qu'avec un forçage constant, il existe un champ de vitesse moyen non nul, qui est composé d'une partie de l'écoulement du forçage et aussi de la re-circulation produite par les non-linéarités des équations de Navier-Stokes. Lorsque l'on moyenne temporellement la vitesse sur un intervalle de temps de l'ordre de 200 temps de retournement des tourbillons à grande échelle, et ce pour différents nombres de Reynolds, les champs cinétiques moyens résultants sont

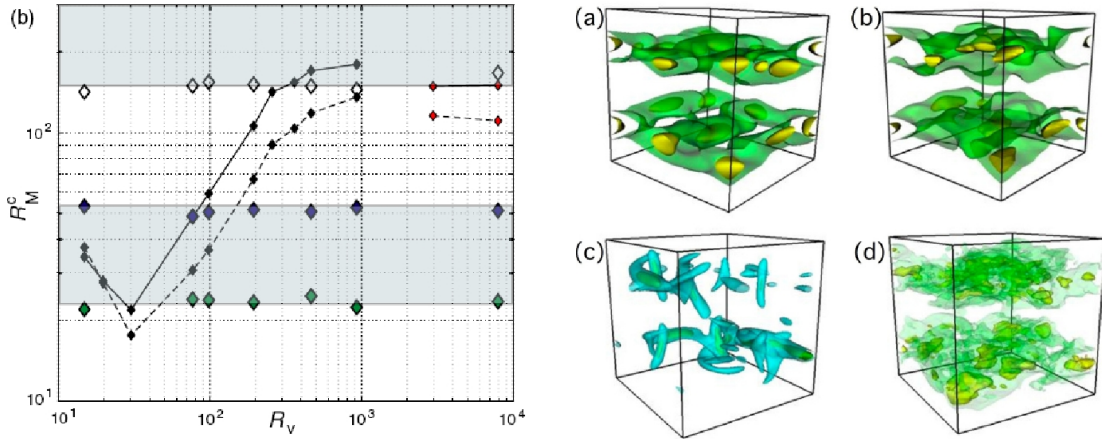


FIGURE 3.1 – (Gauche) Courbes des seuils de la dynamo cinématique et dynamique. (Droite) iso-énergie des champ magnétiques dynamiques moyennés en temps pendant la phase de croissance linéaire (b)(d) à 75 % du maximum de l'énergie magnétique et instantanés des deux modes de dynamo cinématique (a)(c) à 25% du maximum.

pratiquement identiques. En utilisant, le profil moyen comme un champ de vitesse constant dans l'équation d'induction, on peut étudier l'effet dynamo cinématique et son seuil d'apparition. L'analyse du comportement cinématique pour cet écoulement moyen fait apparaître deux modes dynamos. En effet, l'évolution du taux de croissance en fonction du Reynolds magnétique, présente deux fenêtres de dynamo (voir Fig. 2a, Annexe B.3 [Ponty 2007b]). Dans l'espace physique le premier mode pousse dans les plans de cisaillement des vortex (Fig. 3.1 Droite (a)). Ce mode croît spatialement dans toute la boîte, il est associé à un écoulement de grande échelle qui est bien au delà des boîtes fondamentales de l'écoulement de Taylor-Green. Le deuxième mode est localisé au milieu de chaque boîte fondamentale (Fig. 3.1 Droite (c)). Le champ magnétique pousse sous la forme de deux bananes se regardant, il a déjà été identifié dans des simulations cinématiques dans une géométrie cylindrique réalisées avec un champ de vitesse moyen issu des expériences en eau [Marié 2003, Ravelet 2005]. Ce mode était attendu dans l'expérience de VKS, mais n'a pas encore été trouvé.

Nous avons donc comparé ces différents modes de dynamo cinématique (les deux fenêtres grisées délimitées pas les losanges (Fig. 3.1 Gauche) avec celui produit par les simulations dynamiques trait plein ou pointillé. On observe une augmentation du seuil de la dynamo avec le nombre de Reynolds. A faible nombre de Reynolds, le mode dynamo dynamique est identique au premier mode cinématique (Fig. 3.1 Droite (a) et (b)). La question était de savoir si l'augmentation du nombre de Reynolds cinétique, qui s'accompagne de l'augmentation des fluctuations de vitesse, pouvait perturber et même élever le seuil. Une étude utilisant des simulations cinématiques perturbées par du bruit va abonder dans ce sens. En effet, dans

[Laval 2006, Dubrulle 2007], l'équipe de Saclay a utilisé l'écoulement moyen obtenu par moyenne temporelle et lui a rajouté des fluctuations aléatoires gaussiennes en contrôlant, l'amplitude, l'échelle et la fréquence du bruit rajouté. Ces simulations ont montré que le seuil de la dynamo est perturbé et augmenté par ces fluctuations. Ce qui pourrait expliquer la variation de notre courbe dynamique. Mais il y a autre point de vue, étant donnée que le spectre d'énergie magnétique de notre mode instable est piqué à petite échelle, on peut se demander s'il n'y pas un mélange de plusieurs modes dynamos, comme l'ajout d'un mode de dynamo de fluctuation produit par la turbulence elle-même. Dans cette publication, nous n'avions pas vraiment conclu entre ces deux scénarios.

3.4 Perspectives

J'ai effectué deux études supplémentaires non publiées qui peuvent aider à faire avancer ce débat : la première est tout simplement une moyenne temporelle bien plus longue pendant la phase de croissance linéaire de la dynamo dynamique à haut nombre de Reynolds cinétique (Fig. 3.2), qui ressemble finalement bien plus au premier mode de dynamo cinématique (Fig. 3.1a) qu'au second mode dynamo cinématique (Fig. 3.1). La (Fig.3.1d) n'était pas vraiment concluante. Ces structures énergétiques du champ magnétique moyenné sont bien plus proches du premier mode dynamo cinématique calculé sur le champ moyen du Taylor-Green. Cette ressemblance peut donner un argument en faveur de la modification du premier mode dynamo cinématique par les fluctuations de vitesse [Laval 2006, Dubrulle 2007]. La forme de la courbe dynamique du seuil suivrait donc cette modification due aux fluctuations de vitesse.

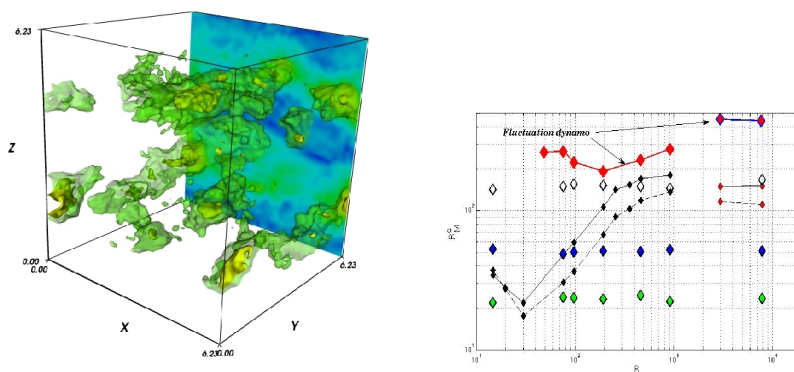


FIGURE 3.2 – A gauche : Moyenne temporelle du champ magnétique pendant la phase de croissance linéaire de la dynamo, et visualisation des structures énergétiques calculées à partir du vecteur magnétique moyenné. Cette visualisation montre que l'énergie magnétique croît dans les plans de cisaillement du Taylor-Green et sous forme de rouleau. A droite : Même figure que Fig. 3.1Gauche avec ajout des seuils obtenus avec les seuils fluctuations cinématiques (en rouge).

Une autre étude a cherché à identifier le seuil de la dynamo issu uniquement des fluctuations de la vitesse, j'ai donc calculé le seuil en enlevant le champ moyen de vitesse à chaque pas de temps. Ainsi, seules les fluctuations restantes peuvent produire une dynamo. La visualisation de cette moyenne est montrée dans la Fig. 3.2 à gauche. La dynamo produite uniquement par des fluctuations de vitesse apparaît à des Reynolds magnétiques bien plus hauts que le seuil de la courbe dynamique (Fig. 3.2 Droite). De ce résultat, on pourrait en déduire que les modes de dynamo dus aux fluctuations cinématiques n'interviennent finalement pas dans la forme de la courbe dynamique du seuil. Mais des résultats plus récents pour un écoulement entretenu par un forçage de G.O Roberts et de l'interaction de modes dynamo à petite et grande échelles peuvent remettre en question cette déduction (Chap.6). Nous aborderons plus globalement une discussion à ce propos au Chapitre 7.

Forçage de Taylor-Green et effets non linéaires

Sommaire

4.1 Régime de Saturation	13
4.2 Branches sous-critiques et cycles d'hystérésis	14

4.1 Régime de Saturation

Même si l'on passe du temps à chercher, à étudier le seuil de l'instabilité dynamo linéaire, c'est finalement le régime de saturation qui est observé expérimentalement et dans les milieux naturels. Avec un forçage de type Taylor-Green et à faible nombre de Reynolds cinétique, le mode dynamo le plus instable est le premier mode cinématique, les structures poussent sous forme de cigare dans le plan de cisaillements des vortex de Taylor-Green. Lors du passage au régime de saturation les structures changent peu et restent sous la forme de structures évoluant à la plus grande échelle de la boîte périodique (voir Fig. 4.1).

Un des premiers résultats que nous avons remarqué dans nos simulations atteignant le régime de saturation, est la diminution d'énergie cinétique aux petites échelles des spectres isotropes lors du passage du régime linéaire, au régime non linéaire puis à la phase de saturation de la dynamo (voir Fig. 4.1). Cela a été noté dans notre article [Mininni 2005a] (Annexe B.4) et aussi dans un travail imposant un champ magnétique extérieur [Haugen 2004]. En effet, la force de Lorentz agit sur toutes les échelles de l'écoulement, mais l'on note plus particulièrement cet effet sur les petites échelles. Dans des simulations d'écoulements entretenus par des écoulements de type de l'ABC fortement hélicitaires (vitesse et de vorticité parallèle) (Annexe A.2.2.2), la mesure des exposants de Lyapunov montre l'évolution des propriétés chaotiques de l'écoulement au cours des trois régimes (linéaire, non linéaire, saturation) [Cattaneo 1996a, Zienicke 1998]. Ces travaux montrent clairement une diminution des exposants de Lyapunov dans la phase non linéaire et de saturation, avec un lissage de l'écoulement. Ce phénomène est en accord avec la diminution du spectre d'énergie du fluide à petite échelle. Pour connaître l'interactivité des échelles entre le fluide et la champs magnétique, l'équipe de Boulder a étudié en détails les fonctions de transfert d'énergie entre les différentes échelles et a mis en

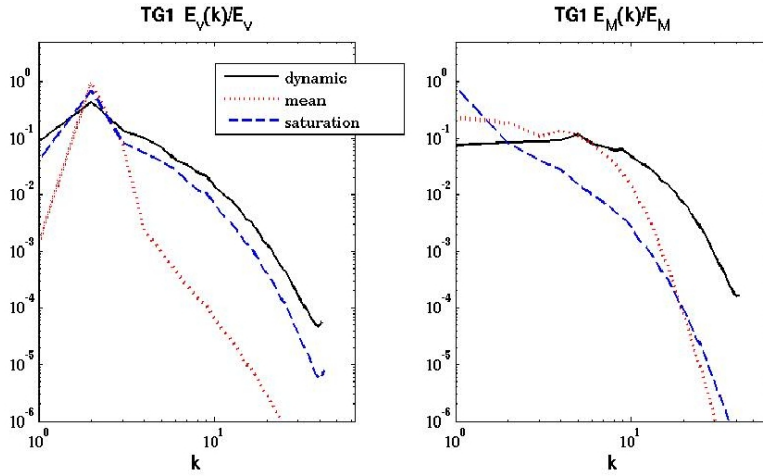


FIGURE 4.1 – Spectres isotropes de l’énergie cinétique (à gauche) et magnétique (à droite). Les spectres en trait plein noir représentent un instantané dans le régime dynamique linéaire de la dynamo ; les spectres en pointillés bleu sont un instantané dans le régime de saturation magnétohydrodynamique et les spectres en pointillés serrés sont les spectres des champs vectoriels moyennés temporellement au cours de la simulation.

évidence des transferts d’énergie non locaux entre le fluide et le champ magnétique [Alexakis 2005b, Mininni 2005b, Alexakis 2005a, Alexakis 2007].

4.2 Branches sous-critiques et cycles d’hystérésis

Dans ce travail [Ponty 2007a] (Annexe B.5), nous mettons en évidence un exemple numérique de bifurcation sous-critique pour l’instabilité dynamo dans un écoulement incompressible entretenu par le vortex de Taylor-Green. En atteignant le régime de saturation de l’instabilité, une augmentation brutale de la diffusivité magnétique n’éteint pas la dynamo, mais change la valeur moyenne de l’énergie magnétique. Cette étude montre l’existence d’un cycle d’hystérésis (Fig. 4.3) qui peut être modifié par la présence d’un champ magnétique extérieur. Ce travail avait commencé sur l’étude de l’induction magnétique, nous avons trouvé ce cycle d’hystérésis dans ce contexte et nous avons réalisé qu’il existait aussi en absence de champ magnétique appliqué.

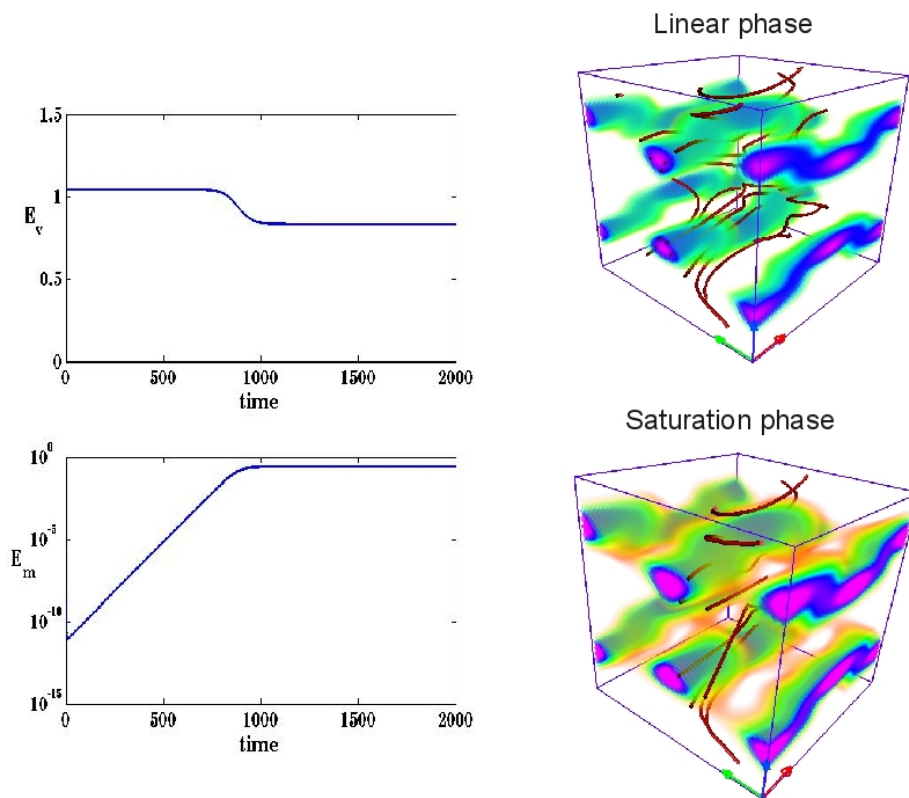


FIGURE 4.2 – A droite : Évolution de l'énergie cinétique et magnétique le long de trois phases de dynamo (linéaire, non linéaire et de saturation). A gauche : Visualisation des structures les plus énergétiques dans la phase linéaire (en haut) et dans la phase de saturation (en bas).

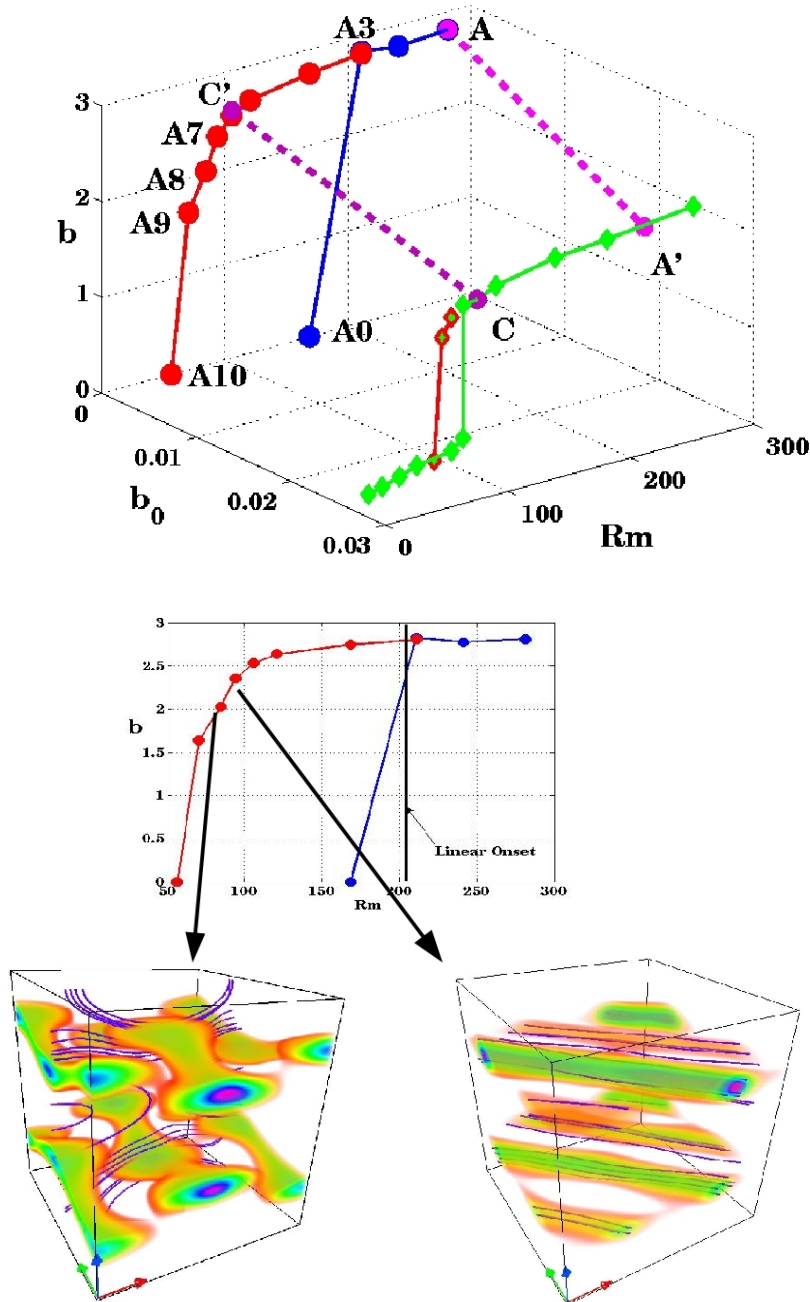


FIGURE 4.3 – En haut : Cycle d’hystérésis avec ou sans champ magnétique extérieur appliqué. Il est possible de passer d’une branche à une autre en appliquant ou en coupant le champ magnétique appliqué. Le saut qui va de C à C' , peut être considéré comme une stratégie pour attraper une branche sous-critique d’une expérience de dynamo, où le seuil dynamo serait difficile à atteindre. Tout d’abord, en appliquant un champ magnétique extérieur et en se plaçant ensuite dans le régime C ; puis en coupant ce champ extérieur, le système se déplacerait sur la branche sous-critiques sans champ C' . En bas : Cycle d’hystérésis avec la visualisation de l’énergie des modes sous-critique. Le mode le plus sous-critique a été utilisé pour la page de couverture du numéro de Physical Review Letter (voir Annexe B.5).

Dynamo intermittente

Sommaire

5.1 Introduction	17
5.2 Et la force de Lorentz dans tout ça ?	18

5.1 Introduction

L'intermittence On-Off a été observée dans différentes expériences physiques, y compris appareils électroniques, convection électrohydrodynamique dans les nématiques, plasmas de décharge de gaz, et instabilités d'ondes de spin [Pikovsky 1984, Hammer 1994, John 1999, Feng 1998, Rodelsperger 1995]. Dans le contexte de la MHD, près de l'apparition de l'instabilité dynamo, l'intermittence On-Off a été étudiée par la modélisation de la dynamo de Bullard [Leprovoost 2006], et les résultats expérimentaux ont confirmé un tel comportement [Bourgoin 2006]. De plus un comportement de type bouffée (ou burst) a été trouvé dans la dynamo turbulente de VKS [Monchaux 2009], même si ce régime d'intermittence On-Off de la dynamo n'a pas été mise en évidence, cela constitue quand même une motivation pour notre étude. Utilisant des simulations numériques directes [Sweet 2001b, Sweet 2001a] ont pu observer l'intermittence On-Off en résolvant les équations de la MHD avec un forçage ABC (Annexe A.2.2.2). Nous avons effectué un travail étendu sur ce cas particulier [Alexakis 2008] (Annexe B.6).

Un moyen simple qui s'est avéré très utile pour modéliser le comportement du champ magnétique durant l'intermittence On-Off en présence de fluctuations de vitesse, est l'utilisation d'une équation différentielle stochastique (SDE-modèle) [Pomeau 1980, Platt 1993, Fujisaka 1984, Fujisaka 1986, Yu 1990, Ott 1994, Platt 1994, Heagy 1994, S. C. Venkataramani 1995, Venkataramani 1996, Aumaître 2006, Aumaître 2005].

$$\partial_t E_b = (a + \xi)E_b - NL(E_b) \quad (5.1)$$

où E_b est l'énergie magnétique, a est un taux de croissance moyen aux temps longs, ξ est un terme de bruit qui est classiquement blanc et d'amplitude D telle que $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t-t')$. Ce bruit modélise les fluctuations de vitesse de l'écoulement. NL est un terme non-linéaire qui garantit la saturation de l'énergie magnétique à

des valeurs finies, Typiquement, on choisit $NL(X) = X^3$ pour explorer les bifurcations super-critiques ou $NL(X) = X^5 - X^3$ pour explorer les bifurcations sous-critiques. Dans tous ces cas (indépendant du mécanisme de saturation non-linéaire) l'équation SDE ci-dessus conduit à une fonction de distribution stationnaire qui pour $0 < a < D$ présente un comportement singulier où $E_b = 0$; à savoir $P(E_b) \sim E_b^{a/D-1}$ indiquant que le système passe beaucoup de temps dans le voisinage de $E_b = 0$ [Platt 1994, Heagy 1994, S. C. Venkataramani 1995, Venkataramani 1996]. Cette singularité est la signature de l'intermittence On-Off. Une remarque importante, est le fait que dans le système dynamique eq.(5.1), l'amplitude du bruit ou ses propriétés ne dépendent pas de l'amplitude de l'énergie magnétique.

5.2 Et la force de Lorentz dans tout ça ?

Dans un système atteignant le régime de saturation, la force de Lorentz a clairement un effet sur l'écoulement. Il y a diminution des fluctuations de vitesse à petite échelle, et il y a diminution des exposants de Lyapunov locaux [Cattaneo 1996a, Zienicke 1998]. Dans certains cas, l'amplitude de l'écoulement est si fortement altérée que le système de dynamo MHD saute dans un autre attracteur, qui peut même avoir d'autres propriétés et ne plus soutenir l'instabilité dynamo [Brummell 2001]. Bien que le mécanisme exact de la saturation de la dynamo soit toujours une question ouverte qui pourrait ne pas avoir une réponse universelle, il est aussi clair que les grandes échelles et les fluctuations turbulentes sont modifiées dans le régime non-linéaire et doivent être pris en compte dans un modèle. Nous nous sommes intéressés plus particulièrement au comportement intermittent et impulsif du phénomène de dynamo dans le régime non linéaire, et surtout à l'effet de la force de Lorentz sur les lois statistiques de l'intermittence prédites par des systèmes dynamiques simples. Nous avons montré que la force de Lorentz augmente le temps de vie de la dynamo dans les périodes "On", en affectant le niveau de bruit produit par les fluctuations de vitesse. Cette modification de l'amplitude du bruit n'est habituellement pas prise en compte. Nous avons aussi regardé comment disparaît le régime On-Off avec l'augmentation des nombres de Reynolds cinétique et magnétique.

La figure 5.1 démontre ce point, sur l'évolution temporelle de l'énergie cinétique magnétique qui passe par des phases On-et des phases Off. Pendant les phases On, la valeur moyenne et l'amplitude des fluctuations observées de l'énergie cinétique sont considérablement réduites. En conséquence les phases On vont durer beaucoup plus longtemps que le modèle SDE ne peut pas prédire. L'effet de la longue durée de la phase On peut être également vu dans les pdfs de l'énergie magnétique. Les PDF sont tracées dans la Fig.5.2 pour différents nombres de Reynolds magnétiques. Pour des différentes valeurs du nombre de Reynolds magnétique la pdf du champ magnétique est concentrée dans de grandes valeurs $E_b \simeq 1$ produisant un pic dans les courbes. Lorsque le nombre de Reynolds magnétique augmente, la loi de puissance On-Off disparaît. En principe, le modèle SDE (eq. 5.1) peut être modifié pour inclure

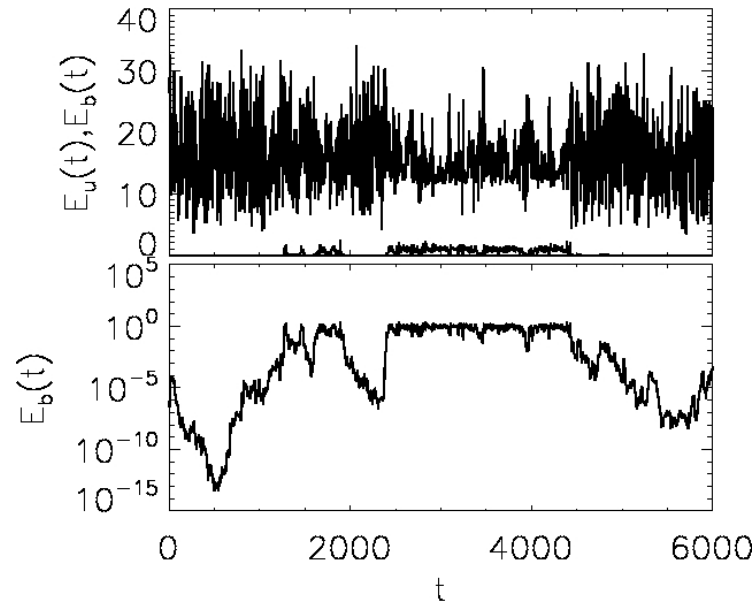


FIGURE 5.1 – Exemple typique de comportement sous forme de «burst» ou bouffée. La figure supérieure montre l'évolution de l'énergie cinétique (haut) et de l'énergie magnétique (bas). La figure inférieure montre l'évolution de l'énergie magnétique dans une représentation logarithmique-linéaire. Pendant la phase de dynamo, l'amplitude des fluctuations de l'énergie cinétique est considérablement réduite.

cet effet : en utilisant une amplitude E_b dépendante du bruit. Il y a de nombreuses possibilités pour modifier l'extinction du bruit, mais le comportement non-linéaire ne peut pas avoir un comportement universel et nous n'avons pas tenter de suggérer un modèle spécifique.

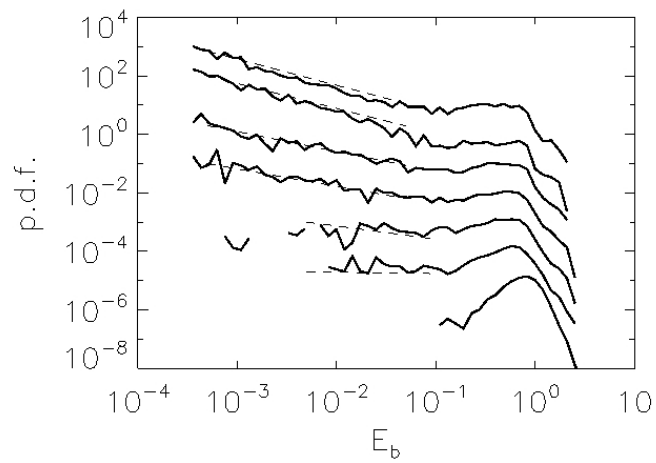


FIGURE 5.2 – Fonction de distribution de probabilité de l'énergie magnétique E_b , pour différentes valeurs du nombre de Reynolds magnétique croissantes du haut vers le bas. Le dernier cas à plus grand nombre de Reynolds magnétique ne montre pas d'intermittence On-Off. La ligne en pointillée indique la prédiction du modèle SDE.

Dynamo à petite et grande échelle

Sommaire

6.1	Introduction	21
6.2	Dynamo de G.O Roberts et fluctuations de vitesse	22
6.3	Loin du seuil	24
6.3.1	Tueur de mode et Dynamo de fluctuation	24

6.1 Introduction

L'écoulement de G.O Roberts [Roberts 1972] a été construit pour produire une dynamo cinématique. Ce forçage est hélicitaire (ingrédient connu pour aider l'apparition de la dynamo) et comporte quatre colonnes avec une hélicité alternée (voir Fig. 6.3). Cette configuration est à l'origine de la croissance à grande échelle du champ magnétique qui est associée un mécanisme dynamo de type " α " [Steenbeck 1966, Krause 1980b]. Ce mécanisme produit un champ magnétique à grande échelle spatiale (généralement la plus grande échelle présente dans le domaine) par des effets collaboratifs du champ de vitesse excité à plus petite échelle. L'écoulement de G. O. Roberts a motivé l'expérience de Karlsruhe (décembre 1999) [Busse 1996, Müller 2000, Stieglitz 2001]. Cet écoulement et le mécanisme de l'effet α ont été intensivement étudiés analytiquement ou numériquement [Soward 1990, Soward 1987, Tilgner 1995, Tilgner 1997, Plunian 2005, Plunian 2002, Rädler 1999, Müller 2004b, Müller 2004a, Tilgner 2008]. L'effet des fluctuations et de la turbulence sur l'effet α ont été aussi regardés en détail [Tobias 2008, Pétrélis 2006, Cattaneo 2009, Kleorin 2009, Sur 2008, Brandenburg 2008, Brandenburg 2009, Vainshtein 1992, Cattaneo 1996b, Rädler 2009, Courvoisier 2006, Frick 2006, Plunian 2005]. Mais curieusement, les effets des fluctuations de vitesse n'ont pas vraiment été étudiés sur un écoulement forcé par un écoulement de G. O Roberts, sauf dans [Mininni 2005c]. Nous avons fait une étude similaire [Ponty 2011] (voir Annexe B.8), mais en gardant un rapport d'aspect de la boîte périodique de 1/2, allongement qui est favorable pour le modes de dynamo de G.O Roberts. C'est d'ailleurs cet allongement qui a été utilisé dans l'expérience de Karlsruhe.

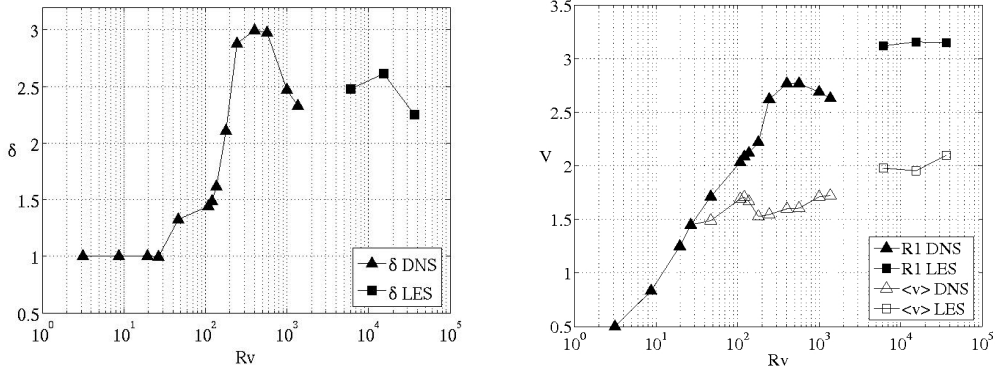


FIGURE 6.1 – A gauche : Taux de fluctuation en fonction du Reynolds cinétique ($\delta = \langle E_v \rangle / E_{\langle v \rangle}$) (voir [Laval 2006]) : A droite : Vitesse «R.M.S» en fonction du nombre de Reynolds cinétique ($V_{rms} = \sqrt{2E_v}$) (triangles pleins) et ainsi que la représentation de la même quantité pour le champ moyenné temporellement (triangles vides). Le rapport de ces deux quantités au carré, donne le taux de fluctuation δ . Nous avons aussi exploré à plus haut nombre de Reynolds ce régime en utilisant un modèle sous maille (LES) [Chollet 1981].)

6.2 Dynamo de G.O Roberts et fluctuations de vitesse

Nous avons donc simulé dans une boîte périodique de rapport d'aspect $1/2$, $((2\pi)^2 \times 4\pi)$, le système MHD complet entretenu par l'écoulement de G.O Roberts (Annexe A.2.2.3). Nous avons étudié le régime linéaire et la phase de saturation pour différents régimes turbulents, en diminuant la viscosité de l'écoulement. Les fluctuations de vitesse augmentent en fonction du nombre de Reynolds, jusqu'à la saturation du taux de fluctuation (voir Fig. 6.1 gauche) et de la vitesse moyenne (Fig. 6.1 droite).

Le long de cette courbe, nous avons calculé le seuil de la dynamo (Fig. 6.2). Le seuil augmente avec les fluctuations, et le champ de vitesse moyenné temporellement est modifié : il ne ressemble plus à la structure de l'écoulement de G.O. Roberts (Fig. 6.3 haut.droite). La déstructuration des colonnes de G.O. Roberts rend le mécanisme cinématique beaucoup moins efficace, ce qui explique cette augmentation du seuil. Au taux de fluctuation le plus grand, le champ moyen retrouve sa structure à 4 colonnes (Fig. 6.3 haut.gauche), le seuil de la dynamo redescend au niveau du Reynolds magnétique cinématique, le mode de G.O Roberts redevient plus actif. Dans cette étude, nous montrons le rôle important du champ de vitesse moyenné en temps. En effet le champ magnétique vit sur une autre échelle temporelle ($\tau_\eta = R_m \tau_{NL}$) que les fluctuations de vitesse, le temps de diffusion magnétique est « R_m » fois plus long que le temps de retournement hydrodynamique. Le champ magnétique va être donc être sensible au champ cinétique moyen. Nous montrons également que lorsque le mode de dynamo est à plus grande échelle que l'échelle

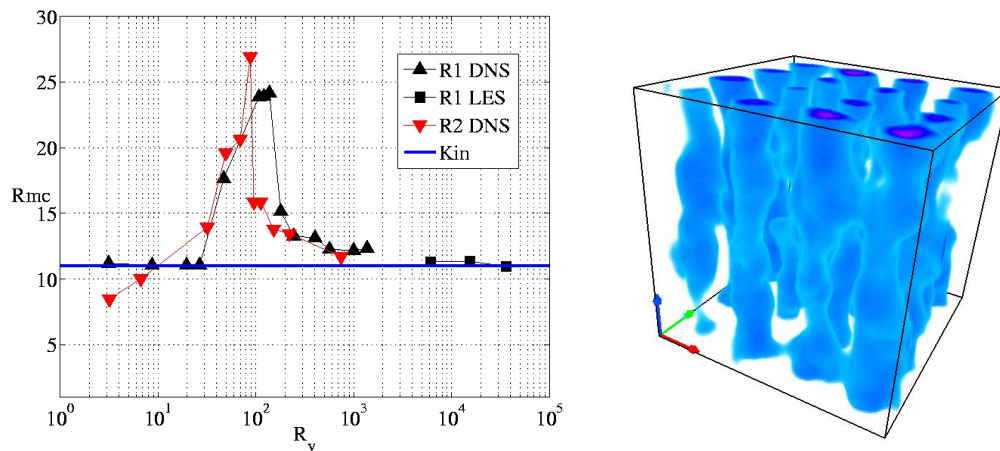


FIGURE 6.2 – A gauche : Courbe traçant le seuil de la dynamo en fonction du nombre de Reynolds cinétique. R1 représente les simulations dans le parallélépipède de rapport d'aspect 1/2, et R2 les simulations dans un cube d'allongement unité («aspect ratio» = 1), mais forcé par quatre cellules fondamentales de G.O Roberts. Ceci permet de faire aussi apparaître le mode $(0, 0, 1/2)$ et le rapport d'aspect 1/2. Ces seuils sont comparés au seuil obtenu dans le cas cinématique, où la vitesse est constante et mathématiquement fixée à celle du G.O Roberts [$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}_{G.O.Roberts}(\mathbf{x})$]. Ce seuil est visualisé par la droite horizontale bleue. A droite une visualisation de l'énergie cinétique du champ de vitesse moyenné en temps sur un intervalle de temps de 100 temps de retournement hydrodynamique pour une simulation R2 dans un cube.

des fluctuations de vitesse, celles-ci n'affecte pas la dynamique du mode dynamo. Avec une séparation d'échelle (fluctuations, mode magnétique), le seuil de la dynamo n'est pas affectée par ces fluctuations de vitesse, ce qui est en accord avec les résultats d'expériences de Karlsruhe, qui sont proches des prédictions numériques des simulations cinématiques.

6.3 Loin du seuil

Nous avons aussi étudié la phase de saturation pour un nombre de Reynolds fixé, avec différents Reynolds magnétiques plus ou moins loin du seuil de la dynamo (Fig 6.4 gauche) et nous avons enregistré au cours des simulations, la force électromotrice, le champ magnétique et les coefficients du tenseur \mathbf{T}_α projeté sur le mode à grande échelle $(0, 0, 1/2)$ et uniquement utilisé les deux directions horizontales (l'effet alpha est nulle dans les composantes verticales). Dans la théorie de l'effet alpha, il y a une séparation d'échelle et une moyenne spatiale qui détermine la plus grande échelle. Ici nous avons défini cette moyenne spatiale par la projection sur le mode $(0, 0, 1/2)$ dans l'espace spectral que l'on notera (\bar{x}) . Dans le cas de la boîte périodique cette séparation d'échelle est «infini» dans les directions x et y , car les modes $(k_x = 0, k_y = 0)$ représentent dans l'espace réel des structures horizontales aux plus grandes échelles de la boîte périodique qui sont reproduites et étendues à l'infini dans les boîtes voisines.

$$\bar{\varepsilon} = \overline{\mathbf{v} \times \mathbf{B}} = \mathbf{T}_\alpha \bar{\mathbf{B}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{T}_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Au dessus du seuil, le champ résultant à grande échelle diminue avec le Reynolds magnétique (R_m) comme $\max(\alpha_{ij}) = O(Rm^{-1})$ (voir Fig. 3 de [Ponty 2011], Annexe B.8). Ce qui est la caractéristique d'une dynamo à petite échelle. Le rapport de l'énergie du mode dynamo de G.O Roberts en $(0, 0, 1/2)$ et l'énergie magnétique totale (Fig. 2 de [Ponty 2011], Annexe B.8), diminue lorsque l'on s'éloigne du seuil. Il y a donc un autre mode dynamo qui doit apparaître, expliquant le niveau d'énergie magnétique élevé qui mène à l'équipartition avec l'énergie cinétique. Les spectres et la visualisation des modes confirment l'apparition d'un mode de dynamo à petite échelle et de type de fluctuation (voir Fig. 6.3 Bas).

6.3.1 Tueur de mode et Dynamo de fluctuation

Nous avons joué à un jeu, qui est seul accessible aux numériciens. Nous avons artificiellement tué à chaque pas de temps le mode dynamo de G. O Roberts. En maintenant l'énergie de ce mode à zéro, nous pouvons regarder quel est le seuil du mode suivant. En effet, nous obtenons une dynamo de fluctuation bien au dessus du seuil du G.O Roberts (Fig 6.4 Haut). Ce résultat est cohérent avec la démarche similaire effectuée avec le forçage de Taylor-Green (Chap. 3.4). Mais ce mode de dynamo de fluctuation ne peut produire le niveau d'énergie du système (Fig. 6.4

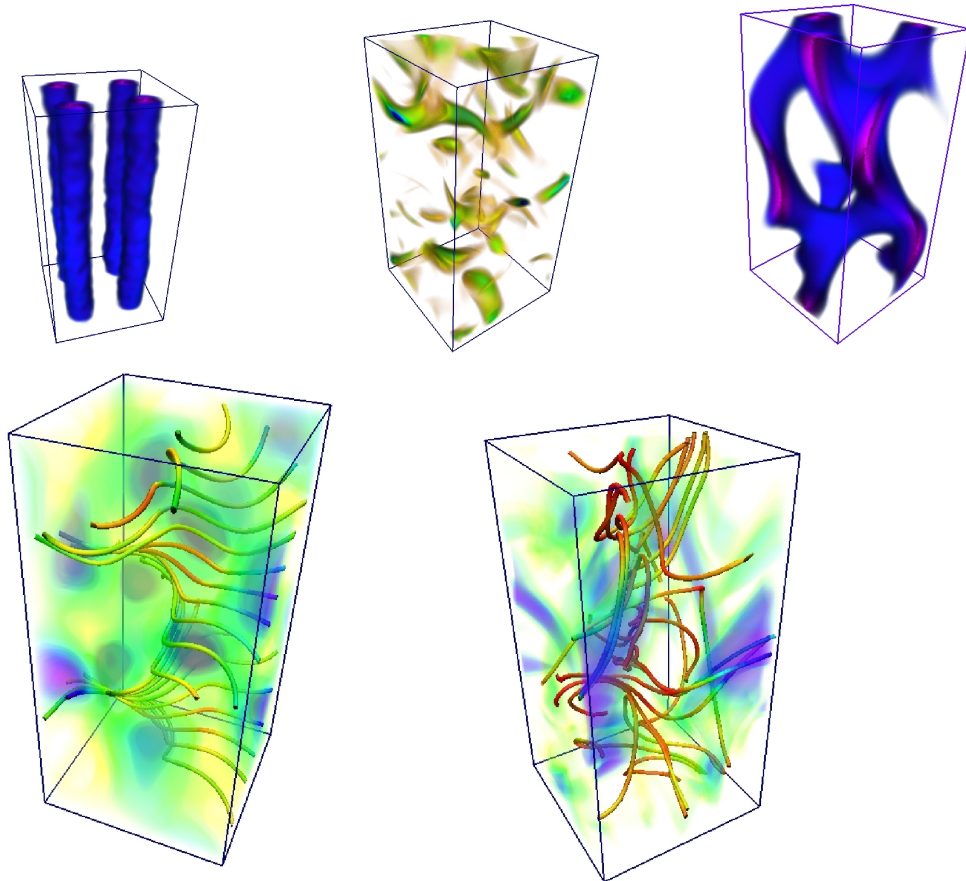


FIGURE 6.3 – En haut : (de gauche à droite) Isosurfaces de l’ensrophie du champ de vitesse moyenné temporellement pour $R_e = 1000$, ensuite visualisation d’un instantané de la même quantité et visualisation du champ de vitesse moyenné temporellement à plus faible nombre de Reynolds ($R_e = 128$), où le champ cinématique moyenné ne reproduit pas la cellule fondamentale de G.O Roberts. En bas : Représentations des lignes de champ magnétique, près du seuil de l’instabilité ($R_m \sim R_{mc}$), et de l’énergie cinétique par “volume rendering”, (à droite) même représentation à plus grand Reynolds magnétique ($R_m = 45R_{mc}$).

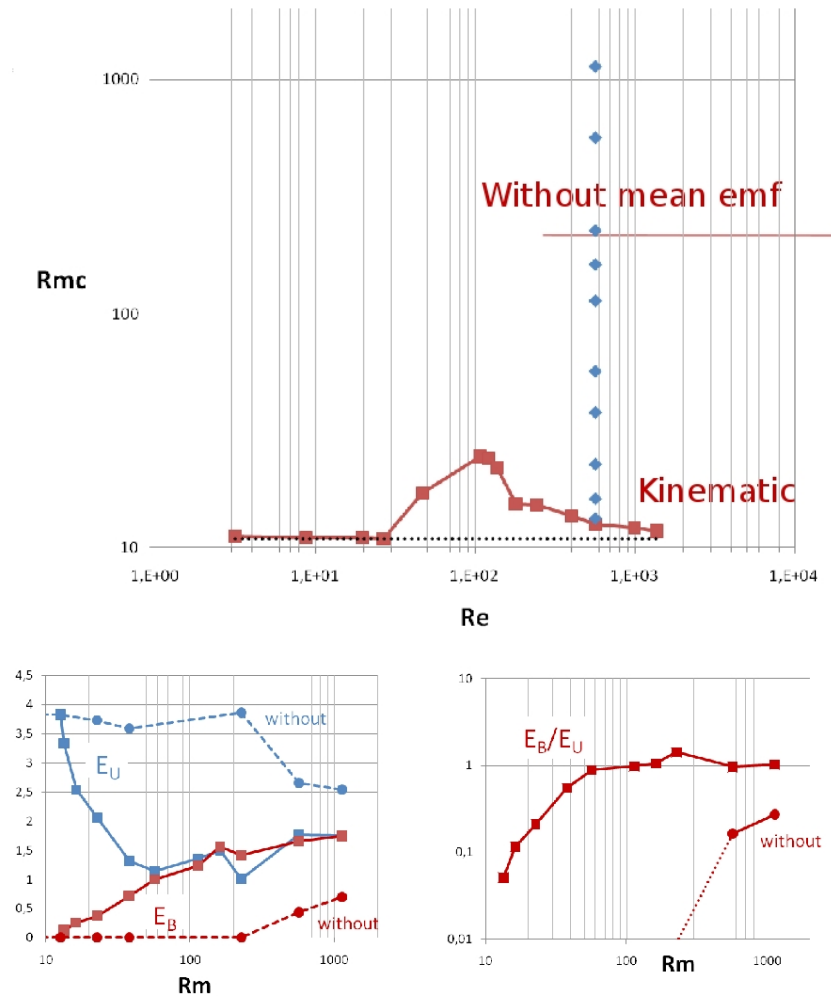


FIGURE 6.4 – En haut : la courbe avec des symboles carrés rouges, représente le seuil de l’instabilité dynamo produite par le forçage de G.O. Roberts. La courbe en pointillé montre le seuil d’un dynamo cinématique produite par un écoulement mathématique de G.O Roberts. En losanges bleus sont indiquées, nos simulations effectuées au dessus du seuil de dynamo à Reynolds cinétique fixé. Le seuil du mode de dynamo de fluctuation où le mode à grande échelle a été supprimé artificiellement est indiqué par la droite horizontale rouge. En bas à gauche : Niveau d’énergie cinétique (bleu) et magnétique (rouge) pour les différentes simulations au dessus du seuil. Les branches en pointillés «without» sont les runs effectués en supprimant à chaque pas de temps le mode magnétique de G.O Roberts. En Bas à droite : Les courbes représentent le rapport des énergies magnétiques et cinétiques dans des simulations de Reynolds magnétique croissant. En pointillés, la même quantité est tracée, pour des simulations où le mode à grande échelle a été tué.

Bas) une équipartition entre l'énergie cinétique et magnétique. Il y a donc une contradiction, comment expliquer l'équipartition du système complet. Ce mystérieux mode n'est pas l'addition des modes de dynamo de G.O Roberts et d'un mode de pure fluctuation. Il a toutes les caractéristiques d'un mode de fluctuation, mais apparait en dessous du seuil de la dynamo de fluctuation. On peut en déduire, qu'il est issu de l'interaction du champ magnétique à grande échelle de G.O Robert qui est faible mais suffisant pour aider à produire une dynamo à petite échelle bien avant le seuil trouvé (mode without). Il y a donc une interaction entre la dynamo à grande échelle et celle de petite échelle qui produit cette équipartition. Ce résultat important est discuté au Chapitre 7.1.1.

Discussions et perspectives

Sommaire

7.1 Discussions	29
7.1.1 Dynamo de champ moyen et de fluctuation	29
7.1.2 Effet des conditions aux limites magnétiques	32
7.1.3 Hypothèse d'une dynamo Fluide-Structure	33
7.2 Perspectives	34
7.2.1 Effet des parois et conditions aux limites magnétiques	34
7.2.2 Utilisation de traceurs lagrangiens pour une étude des différentes phases de la dynamo	35

7.1 Discussions

7.1.1 Dynamo de champ moyen et de fluctuation

Les deux études sur la détermination du seuil de l'instabilité dynamo (Chap. 3 et 6) montrent une variation du seuil en fonction du nombre de Reynolds cinétique, qui est bien différente selon le forçage (voir Fig. 7.1). La dynamo à grande échelle de G.O. Roberts est bien plus facile à obtenir, que celle produite par le forçage de Taylor-Green. Dans les deux cas, lorsque la turbulence augmente, le seuil de la dynamo augmente. Pour le mode de dynamo à grande échelle de type G.O Roberts, dans le régime à grand nombre de Reynolds cinétique, le seuil redescend au niveau du seuil cinématique. Nous obtenons d'ailleurs une dynamo à faible nombre de Prandtl magnétique $\sim 10^{-3}$. Un comportement similaire a été trouvé avec un forçage très hélicitaire de type ABC [Mininni 2006]. L'écoulement de G.O Roberts et l'ABC sont de la même famille et sont des écoulements de Beltrami ($\mathbf{v} = k_0 \nabla \times \mathbf{v} = k_0 \boldsymbol{\omega}$) (Annexe A.2.2.2). Pour le forçage de Taylor-Green, le seuil ne redescend pas mais atteint finalement à un plateau indépendant du nombre de Reynolds cinétique.

- Ma première remarque concerne l'efficacité des dynamos à grande échelle qui ne ressentent pas les effets des fluctuations de vitesse qui sont à plus petites échelles. Dans la mesure où il y a un champ moyen qui produit une dynamo cinématique efficace, les fluctuations deviennent transparentes aux mécanismes de la dynamo à plus grande échelle. Cette séparation d'échelle entre les fluctuations et le mode dynamo semble être une recette facile pour obtenir de faibles nombres de Reynolds magnétiques critiques. Il est vraiment dommage que l'expérience de Karlsruhe ait été démantelée ! Il serait clairement intéressant d'imaginer un dispositif expérimental

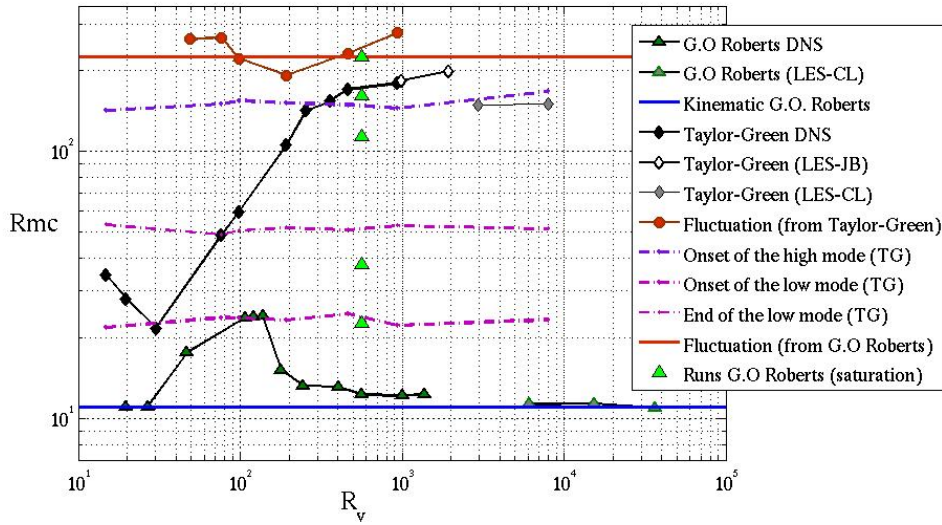


FIGURE 7.1 – Graphique global des seuils de la dynamo linéaire et cinématique obtenus des deux forçages (Taylor-Green et G.O Roberts (Chap. 3 et 6)). Les seuils sont montrés en fonction des nombres de Reynolds cinétiques et magnétiques calculés avec l'échelle intégrale du fluide et sa vitesse «rms» (voir Annexe A.2.3). Les courbes de l'instabilité dynamo sont comparées aux seuils de la dynamo cinématique calculés à partir des champs moyennés temporellement (courbes violette et mauve montrant les fenêtres de dynamo cinématique du Taylor-Green) ou des champs mathématiques (ligne bleue pour le G.O Roberts ($Rm \sim 11$)). Les seuils de la dynamo de fluctuation, calculés soit en retranchant le champ moyen pour le forçage de Taylor-Green, soit en tuant le mode de dynamo de G. O. Roberts sont représentés en rouge.

qui pourrait produire un écoulement proche des colonnes de G.O Roberts, mais avec bien plus de degré de liberté qu'un enchaînement de tubes contraignant la trajectoire du fluide.

- Les seuils de la dynamo de fluctuation calculés, soit en retranchant le champ moyen dans le cas du forçage de Taylor-Green, soit en tuant le mode de dynamo de G. O. Roberts sont représentés dans la Fig 7.1. On peut noter que les seuils de l'effet dynamo de fluctuation sont très proches, ainsi que ceux calculés avec un forçage δ -corrélé en temps (Fig.1b [Schekochihin 2007]) dans les mêmes gammes de nombre de Reynolds cinétiques. Ils sont au dessus des dynamos produites par des forçages constants présentant un champ moyen temporel. On peut en déduire que le moyen de produire des fluctuations dans la boîte périodique importe peu, elles engendrent des seuils de dynamo de fluctuations à peu près équivalents. Les fluctuations de vitesse sont en grande partie à grandes échelles, avec un temps de corrélation dépendant du taux de fluctuation, ou de la turbulence, qui devient constant dans la limite des grands nombres de Reynolds cinétiques. Avec un nombre de Reynolds magnétique suffisant, des fluctuations magnétiques sont engendrées et sont globalement instables

pour produire un effet dynamo à petite échelle.

- On peut se demander, s'il existe une interaction entre les modes de dynamo de champs moyens et des fluctuations. Le rapport des énergies cinétique et magnétique avec ou sans le mode de G.O Roberts (Fig. 6.4 Bas), nous montre que la seule présence du mode de G.O Roberts ne peut pas expliquer le niveau de l'énergie totale (voir aussi Fig. 2 de [Ponty 2011], Annexe B.8) et l'équipartition entre énergie cinétique et magnétique. Il y a forcément un mécanisme de dynamo supplémentaire, et étant donné ses propriétés, on peut en déduire qu'il est lié à un mode de dynamo de fluctuation apparaissant bien avant le seuil détecté (Fig. 7.1, $R_m \sim 220$). La présence de champ magnétique à grande échelle, engendré par le mode de G.O Roberts, semble favoriser l'apparition d'un mode de fluctuation, en dessous de son seuil intrinsèque.

- A grand nombre de Reynolds cinétique, le mode de dynamo produit par le forçage de Taylor-Green et la turbulence a toutes les caractéristiques d'un mode de dynamo de fluctuation. Il n'y a qu'un pas pour en déduire un scénario similaire à celui du cas du forçage de G.O Roberts. Au dessus du seuil du premier mode de dynamo cinématique, le champ magnétique est amplifié à grande échelle. Ce mode magnétique pourrait aider l'apparition d'un mode de fluctuation bien avant le seuil global détecté (Fig. 7.1, $R_m \sim 220$). Dans ce cas précis, ce mélange de mode apparaîtrait au seuil, contrairement au cas du forçage de G.O. Roberts. Ce scénario est compatible avec le mécanisme de l'élévation du seuil linéaire par la présence de fluctuations de vitesse [Laval 2006, Dubrulle 2007]. Il y a plusieurs pistes pour expliquer qu'un mode apparaisse en dessous de son seuil : on peut penser à un saut sur une branche non linéaire sous critique excité par des fluctuations. Dans le cas du forçage de Taylor-Green, c'est une piste valide étant donnée notre connaissance du régime non linéaire (Chap. 4.2). Une autre explication pourrait être tout simplement un phénomène d'induction du champ magnétique du premier mode, induit par des fluctuations. L'hypothèse de l'apparition d'un mode de dynamo de fluctuation avant son seuil a besoin d'être validé avec une étude plus en profondeur.

Le problème de l'apparition d'un mode de fluctuation devient primordiale pour comprendre les derniers résultats de la dynamo expérimentale de VKS. En effet dans la dynamo turbulente trouvée dans l'écoulement de Von Kármán Sodium [Monchaux 2007, Berhanu 2007], la géométrie du mode trouvé possède la géométrie d'un dipôle ($m = 0$ où m représente le nombre d'onde azimutal) [Monchaux 2009], en contradiction avec le mode prédit par les simulations cinématiques [Marié 2003, Ravelet 2005] ($m = 1$). L'argument d'avoir une dynamo de fluctuation qui est dominante par rapport au mode cinématique a été présenté pour expliquer l'apparition de ce mode différent du mode cinématique ($m = 0$) [Petrelis 2007]. Ce fut une surprise, car les deux autres dynamos expérimentales [Gailitis 2000, Gailitis 2001, Gailitis 2004, Müller 2000, Stieglitz 2001] ont obtenu des seuils et des géométries de champ magnétique entièrement compatibles avec les simulations cinématiques. L'argument des fluctuations turbulentes comme source du mode magnétique en forme de dipôle a été mise évidence dans une simulation

en géométrie sphérique où le mode en $m=0$ n'apparaît dans un régime turbulent [Gissinger 2008c]. Mais il y a d'autres arguments qui pourraient expliquer la géométrie du mode dominant, comme un mécanisme de type $\alpha\text{-}\omega$, mis en avant pour l'induction magnétique dans l'écoulement de Von Kármán [Bourgoin 2004] et l'idée a été reprise dans le contexte de la dynamo [Petrelis 2007].

7.1.2 Effet des conditions aux limites magnétiques

Il y a donc plusieurs explications avancées pour obtenir le mode dipolaire de la dynamo stationnaire de VKS (rôle de la turbulence et mécanisme $\alpha\text{-}\omega$). Mais la dynamo de VKS a été uniquement obtenue avec un ou des disques-pales en fer doux [Verhille 2010a]. Le rôle des conditions aux limites magnétiques va donc être mis en avant et constitue actuellement la piste privilégiée pour expliquer l'apparition du mode $m = 0$.

Actuellement, des efforts se concentrent sur l'utilisation de techniques numériques (éléments finis ou aux volumes finis) pour tenir compte des géométries des expériences de dynamo et, surtout, des conditions aux limites magnétiques [Kenjereš 2007b, Kenjereš 2007a, Guermond 2003, Guermond 2007, Iskakov 2004, Iskakov 2006]. Des simulations ont montré l'importance des conditions aux limites magnétiques à la fois pour faire descendre le seuil de la dynamo, mais aussi pour trouver le mode dipolaire ($m = 0$) [Laguerre 2008, Gissinger 2008a, Gissinger 2008b, Giesecke 2010].

Expérimentalement, une étude approfondie de la réponse d'induction magnétique est menée en fonction de différents matériaux (acier, cuivre et fer doux) des disques-pales dans le gallium liquide [Verhille 2010a, Verhille 2010b]. Cette étude souligne que le phénomène d'induction est plus amplifié lorsque le fer doux est employé. La géométrie des modes favoriserait un dipôle axial (mode $m = 0$). La possible localisation de la dynamo près des disques en rotation et les comportements non linéaire de VKS [Monchaux 2009] pourraient être aussi le fruit de l'interaction de deux dynamos indépendantes.

7.1.3 Hypothèse d'une dynamo Fluide-Structure

J'irais plus loin dans la formulation d'une explication de la dynamo disque-pales en fer doux de VKS. En effet, des résultats expérimentaux [Verhille 2010a, Verhille 2010b], des résultats théoriques [Petrelis 2007], ainsi que des simulations numériques, soit par la dynamique de vortex à l'intérieur des pales [Gissingner 2008a], soit en supposant une dynamo indépendant (en rajoutant artificiellement un effet α) sur chaque système disque-pales [Laguerre 2008], suggèrent que la production de la dynamo soit localisée complètement autour d'une et une seule structure disque-pales. Il ne suffit d'ailleurs que d'un seul disque en fer doux en mouvement pour obtenir le mode de dynamo stationnaire.

La dynamo localisée autour des disques est fortement liée à la présence du fer doux matériel paramagnétique. J'émetts l'hypothèse que ce mécanisme est lié au déplacement de courant électrique dans la structure disque-pales. Ce serait la combinaison de la dynamique fluide MHD et des courants dans la structure qui produirait le mécanisme de bouclage nécessaire à une instabilité dynamo. Ce que j'appellerais une **dynamo Fluide-Structure**. En effet seul un disque en fer doux n'est pas suffisant pour atteindre le seuil, il faut que toute la structure disque-pales soit de ce matériel. Un autre résultat récent vient appuyer cette hypothèse : l'expérience de Riga a été reconduite récemment. Mais l'équipe a eu beaucoup de mal à reproduire la dynamo au même seuil que celui obtenu en 2000 ! L'explication retenue est l'apparition d'oxydes qui ont pollué les parois de l'expérience et qui empêche la bonne conduction de courant dans les cylindres de l'expérience [Stefani 2011]. Cela signifie que l'expérience de Riga est elle aussi fortement dépendante de la conduction de ses courants dans sa structure solide.

Si l'hypothèse Fluide-Structure est avérée, cela nous ouvre une nouvelle discipline passionnante, à savoir l'élaboration et la construction, de systèmes fluide-structure MHD les plus efficaces possibles pour obtenir des instabilités.

Dans ce cadre, lorsque les deux disque-pales sont en mouvement avec deux vitesses de rotation différentes, les résultats de VKS montre une dynamique non linéaire extrêmement riche (cycle périodique, reversement, dynamique turbulente de busrt) [Monchaux 2009]. Le phénomène de renversement a été expliqué à travers un modèle de couplage des modes dipolaire et quadripolaire [Pétrélis 2009, Gissingner 2010]. Ces résultats expérimentaux et ce modèle théorique sont complément compatibles, avec hypothèse de dynamo Fluide-Structure, c'est simplement la dynamique de deux dynamos distinctes qui interagissent entre elles. Ce mécanisme d'interaction de deux dynamos a été présenté dans la thèse de [Verhille 2010a].

Nous nous retrouvons devant un domaine d'exploration encore plus vaste que nous n'imaginions. La science est finalement une ouverture continuelle de nouvelles boîtes de Pandore. Cela implique pour les numériciens qu'ils doivent s'intéresser à des systèmes bien plus complexes : l'interaction fluide-structure magnétique.

7.2 Perspectives

7.2.1 Effet des parois et conditions aux limites magnétiques

Afin de considérer des situations plus réalistes, les modes dynamo seront recherchés dans différentes géométries (cubiques, cylindriques ou sphériques) dont les parois sont modélisées par une méthode de pénalisation déjà intégrée dans mon code. Le fluide est contraint et pénalisé dans une géométrie donnée alors que le champ magnétique ne l'est pas. J'ai pour cela adapté la méthode spectrale de pseudo-pénalisation proposée par [Pasquetti 2007] de manière à intégrer des parois artificielles dans un espace périodique. L'effet de ces géométries sur le seuil de la dynamo sera exploré. Cette étude qui permettra de s'approcher des contraintes géométriques présentes dans les expériences de MHD dans les métaux liquides et de s'affranchir des modes présents uniquement en géométrie périodique. Il est à noter que ces techniques de simulation des parois dans des codes spectraux périodiques sont aussi un challenge numérique. Près de la paroi, le schéma perd sa précision spectrale et la prise en compte de la couche limite devient délicate. A travers le contrat d'une ANR blanche en 2011 : projet SiCoMHD [École Centrale Lyon, M2P2-CNRS Marseille et notre l'équipe turbulence fluide et plasma]. Je suis responsable du noeud Niçois de ce contrat. Nous allons joindre nos efforts pour optimiser ces techniques pour des écoulements MHD et pour l'effet dynamo dans des fluides turbulents. Je compte aussi mener ces travaux notamment en collaboration avec l'équipe du Prof. Rainer Grauer (Université de Bochum, Allemagne) et Holger Homann (OCA).

Dans ce projet, nous allons notamment essayer de prendre en compte des conditions aux limites magnétiques plus complexes que la simple périodicité. Avec ces techniques, nous essayerons de simuler une structure solide en mouvement qui force le fluide comme la structure disque-pales de VKS, mais, aussi et surtout, de prendre en compte de la conduction des courants et des champs magnétique à travers cette structure. Nous pourrions ainsi explorer l'idée d'une dynamo fluide-structure.

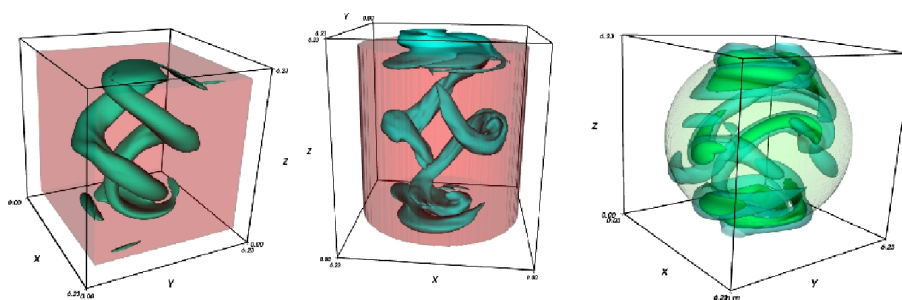


FIGURE 7.2 – Visualisation de l'énergie magnétique produite par un écoulement de type von-Kàrmàn dans différentes géométries (Y.Ponty), simulé en utilisant la technique de pseudo-pénalisation de [Pasquetti 2007].

7.2.2 Utilisation de traceurs lagrangiens pour une étude des différentes phases de la dynamo

L'utilisation de traceurs pour comprendre la structure eulérienne locale de l'écoulement le long d'une trajectoire sera utilisée pour comparer les propriétés de transport et l'efficacité de la production de la dynamo. Il s'agit notamment de comprendre, d'un point de vue lagrangien, l'effet de la force de Lorentz sur les fluctuations de vitesse à petite échelle. Il est à noter que l'ensemble de ce projet nécessite l'analyse d'un volume très important de données et l'utilisation de calculateurs massivement parallèles. A partir de plusieurs études antérieures, le spectre d'énergie de la vitesse diminue aux petites échelles pendant les phases non linéaires et de la saturation. L'écoulement devient "lisse" et moins chaotique d'un point de vue de Lagrangien, comme le montre la mesure des exposants de Lyapunov de temps finis. Nous savons également que les transferts d'énergies entre le fluide et le champ magnétique sont essentiellement non locaux. Néanmoins, la compréhension du processus de saturation est loin d'être complet. Mon projet vise à utiliser les outils statistiques pour combler le déficit de connaissances, en calculant les trajectoires lagrangiennes pendant les différentes phases de la dynamo (croissance linéaire et non linéaire, la saturation). La statistique lagrangienne offre un nouveau domaine d'investigation, en particulier avec une évaluation continue des quantités au cours du temps, qui n'a que très peu été utilisée [Homann 2007, Homann 2009]. Je compte mener ces travaux notamment en collaboration avec l'équipe du Prof. Rainer Grauer (Université de Bochum, Allemagne) et Holger Homann (OCA). Il y aura sûrement des liens avec l'équipe expérimentale du laboratoire de physique de l'ENS Lyon et J. Bec (OCA).

Méthodes numériques et diagnostics

Sommaire

A.1 Méthodes pseudo-spectrales	38
A.1.1 Boîte Périodique	40
A.1.2 Schéma temporel et déaliasing	40
A.2 Équations fondamentales	41
A.2.1 Équation de base	41
A.2.2 Les Forçages	42
A.2.3 Nombres sans dimension	45
A.3 Modèle de turbulence sous mailles	46
A.4 diagnostics	48
A.4.1 Quantités globales	48
A.4.2 Spectres uni-dimensionnel	49
A.4.3 Résolutions : Cauchemar sur la grille	50
A.4.4 Sondes	53
A.4.5 Visualisation tri-dimensionnelle	54
A.4.6 Moyenne temporelle et champ moyen	55
A.5 Parallélisation	56
A.5.1 Penser Parallèle	58
A.5.2 Entrées-Sorties en Parallèle (MPI-IO)	58
A.5.3 Découpage de la grille, FFT et optimisation	59
A.6 Stratégie parallèle pour les diagnostics et l'interactivité de codes multi-physiques	61
A.7 Outils d'aide à la programmation	62
A.7.1 Trac et subversion (svn)	62
A.7.2 Cmake, compilation automatique	65
A.7.3 tests Automatiques	67
A.8 Perspectives	68

A.1 Méthodes pseudo-spectrales

Dans les quarante dernières années, les scientifiques ont résolu des systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) en utilisant des développements en séries tronquées, où les inconnues sont les coefficients de l'expansion. La base de Fourier est appropriée pour des problèmes périodiques. Pour des problèmes non périodiques, les polynômes de Tchebyshev ou de Legendre sont couramment utilisés. Les fondements des méthodes spectrales ne sont pas récentes. Pendant de nombreuses années bien avant que les ordinateurs soient utilisés pour le calcul numérique, des études théoriques en physique mathématique, et spécialement en mécanique des fluides ont largement fait usage des développements en série. Ainsi, ces études ont conduit au développement important de fonctions spéciales. Cependant, les méthodes de projection en séries polynomiales ont montré de sérieuses limites et ont rencontré de grandes difficultés lors de calcul ayant un trop grand nombre de termes ou lors de calcul de terme non linéaires.

Dans les années 1970, la relance de la méthode de Fourier a coïncidé avec une augmentation de la puissance de calcul et l'apparition l'algorithme de la transformée de Fourier rapide (FFT) [Cooley 1965]. Les méthodes pseudo-spectrales, où les termes linéaires sont calculés dans l'espace spectral et les termes non linéaires dans l'espace réel, ont été introduites par [Orszag 1972a]. Ces méthodes sont depuis intensivement utilisées pour des simulations directes de la turbulence. Pour une géométrie partiellement ou complètement périodique, de nombreux ouvrages décrits dans le détail les différentes méthodes [Canuto 1988, Boyd 1989, Peyret 2002]. L'algorithme de la transformée de Fourier rapide (FFT) s'est amélioré au fil des années et a été optimisé pour les nouvelles générations d'architecture des ordinateurs, notamment dans la période où les processeurs vectoriels (Cray I, II, X-MP, Y-MP) étaient les plus rapides. Récemment, l'algorithme de FFT a été optimisé pour la plupart des processeurs modernes dans une bibliothèque (www.fftw.org) où de différentes stratégies d'optimisation sont proposées automatiquement pour adapter la FFT en fonction de la plate-forme de calcul et de la taille du problème.

À la fin des années 1990 et 2000, l'architecture multi-processeurs est devenue très répandue. La bibliothèque MPI (Message Passing Interface) est maintenant un standard, et différents groupes scientifiques ont construit leur propre code parallèle pseudo-spectral pour résoudre des problèmes non linéaires [Kaneda 2006, Meneguzzi 1981, D. Mininni Pablo 2003, Ponty 2004]. Pour un faible nombre de processeurs (nombre de processeurs inférieur au nombre de points de collocation dans la plus grande dimension), l'espace périodique est coupé en tranches. Les champs sont locaux pour deux dimensions d'espaces, mais pour effectuer la FFT dans la troisième direction, il faut d'abord faire une transposition global du cube pour que cette direction devienne local dans chaque processeur. Cette transposition nécessite une communication globale gérée suivant différentes stratégies (voir Chap A.5.3).

Pour la géométrie plan ou de la géométrie sphérique la stratégie est la même ; les tranches du domaine sont distribuées localement dans chaque processeur, mais cette fois-ci, la troisième direction est traitée différemment par une expansion polynomiale

spécifique ou avec des méthodes aux différences finies, ou même aux volumes finis [Christensen 2001, Dormy 1998, Jones 2000, Glatzmaier 1995, Roberts 2000].

Les méthodes pseudo-spectrales sont les méthodes numériques les plus précises, avec la méthode Galerkin, la solution est projetée sur une base polynomiale finie (en général orthogonale) et avec des polynômes qui satisfont les conditions aux limites du domaine (Périodiques, de Dirichlet, de Neumann). La convergence spatiale est exponentielle, et vraiment plus efficace que toutes méthodes aux différences finies ou schémas d'éléments finis. En effet pour effectuer une simple dérivation d'une fonction, le système prend en compte de tous les points de collocations du domaine complet.

Pourquoi avons-nous besoin d'une grande précision spatiale ?

L'intégration à long terme des instabilités hydrodynamiques ou des systèmes hors équilibres conduit souvent à des instabilités numériques ou l'accumulation d'erreurs. Les stratégies communes pour préserver la stabilité de l'intégration sont d'ajouter une dissipation numérique, ou d'utiliser des schémas conservatifs. Les méthodes spectrales sont bien plus stables, même sans formulation conservative ou l'ajout de termes d'amortissement artificiels.

Il s'agit d'une méthode globale, ce qui implique une communication globale (lors de la transposition). Cette communication globale a des effets pervers sur l'efficacité globale du calcul surtout pour une architecture fortement parallèle, l'équilibre entre les calculs locaux et la communication ne doit pas être rompue. Cet argument a été utilisé de nombreuses fois pour prétendre que les méthodes pseudo-spectrales seront bientôt obsolètes pour le HPC (High Performant Computing). Mais les nouvelles technologies offrent une progression fulgurante de la bande passante et de la latence au même rythme que la fréquence du CPU. Et d'ailleurs aujourd'hui, pour réduire la consommation d'énergie et le problème de chauffage excessif des CPUs, l'augmentation de la fréquence du CPU s'est ralentie. L'architecture des prochaines générations d'ordinateurs parallèles est dotée de noeuds multi-coeurs. Nous devons prendre en compte ce virage technologique en adaptant une stratégie mélangeant du multi-coeurs (MPI) et du multi-threading (OPENMP, Multi-thread).

Une méthode alternative parallèle et spectrale est possible, joindre ensemble beaucoup de domaines élémentaires où les équations sont résolues par une méthode spectrale, et utiliser les conditions de continuité entre chaque domaines élémentaires. Cette technique est bien connue comme «la méthode des éléments spectraux» [Fischer 1997, Deville 2002]. Elle est également utilisée intensément et bien adaptée pour le calcul parallèle, où chaque élément spectral est pris en charge par un noyau ou un noeud à mémoire partagée. Peu d'équipes dans le monde ont fait un effort pour implémenter ces techniques d'éléments spectraux [Deville 2002, Giannakis 2009, Rosenberg 2007, Fournier 2009]. Même si je trouve intéressante ces approches, elles restent difficiles à optimiser. Elles sont efficaces sur des géométries complexes et donc peu adaptées à des problèmes fondamentaux de turbulence. Je préfère pour l'instant me concentrer sur des méthodes globalisant un domaine spectral complet.

A.1.1 Boîte Périodique

La boîte périodiques est un cadre naturel pour étudier des phénomènes fortement non linéaires et turbulents. Les fluctuations créées ou injectées à l'intérieur du domaine de simulation ne sont pas affectées par les conditions aux limites. Cette géométrie est très utilisée pour étudier le régime de turbulence car le taux de fluctuation de vitesse est bien plus élevée que celle d'un domaine borné. Il est donc naturel d'utiliser cet outil pour explorer le rôle des fluctuations de vitesse sur des instabilités [Orszag 1972a, Canuto 1988, Peyret 2002, Orszag 1972b]. Le domaine de simulation périodique est souvent représenté comme une partie d'un fluide turbulent dans un milieu naturel, et il est un espace mathématique pour l'analyse théorique de la turbulence [Frisch 1996, Lesieur 1997]. La cascade d'énergie entre les différentes échelles est naturellement présente dans l'espace spectral, l'équation de Navier-Stokes accumule un maximum de symétries et l'absence de parois qui en font de cette géométrie un outil idéal pour étudier la turbulence homogène et isotrope [Vincent 1991].

Cette géométrie impose des solutions parfaitement périodiques dans les 3 directions et permet de projeter les solutions sur un développement en cosinus et sinus numériquement. Elle permet surtout de naviguer entre l'espace réelle et l'espace spectral avec des transformées de Fourier rapide (FFT).

Actuellement, les résolutions les plus élevées obtenues en mécanique des fluides, pour résoudre l'évolution de l'équation de Navier-Stokes sont de l'ordre 4096^3 [Kaneda 2003]. Dans un avenir proche, ces résolutions extrêmes deviendront un régime facilement atteignable et nous permettront d'explorer une gamme de nombre de Reynolds cinétiques bien plus élevés et d'effectuer de nombreux travaux impliquant un grand nombre de temps de retournement des tourbillons, ce qui nous permettra de produire des statistiques convergées.

A.1.2 Schéma temporel et déaliasing

Le schéma numérique utilisé est bien connue des spécialistes et peut être vu en détails dans le chapitre 7.2 du livre [Peyret 2002]. Classiquement les termes linéaire sont traités dans l'espace spectral, les termes non linéaires dans l'espace réel et les FFT permettent de transformer les champs d'un espace à un autre. Pour l'équation incompressible de Navier-Stokes, le terme de pression est éliminé en appliquant l'opérateur de projection sur l'espace des vecteurs de divergence nulle dans l'espace spectral. Nous utilisons un schéma temporel proposé par [Basdevant 1982] qui traite implicitement le terme de diffusion.

Les équations d'un système de diffusion peuvent s'écrire de manière générale comme

$$\frac{dU_k}{dt} = -\nu k^2 U_k + G_k(U) \quad (\text{A.1})$$

et la solution peut explicitement s'écrire sous la forme exponentielle

$$\frac{d e^{\nu k^2 t} U_k}{dt} = e^{\nu k^2 t} G_k(U(t), t) \quad (\text{A.2})$$

où G_k est un opérateur non-linéaire.

Un schéma du second ordre d'Adams-Basford est utilisé pour traiter les termes non linéaires et surtout le terme d'advection, le schéma temporel s'écrit :

$$U_k(t + \Delta t) = U_k(t)e^{-\nu k^2 \Delta t} + e^{-\nu k^2 \Delta t} \Delta t \left[\frac{3}{2}G_k(t) - \frac{1}{2}G_k(t - \Delta t)e^{-\nu k^2 \Delta t} \right] \quad (\text{A.3})$$

En rajoutant un processus de dealiasing qui enlève les plus grands nombres d'onde en utilisant la règle des 3/2 [Orszag 1972a] sur les termes non-linéaires, nous obtenons un schéma numérique stable. Ce schéma est uniquement du second ordre. Certains préfèrent utiliser une méthode de Runge-Kutta d'ordre 3 ou supérieur. Notre schéma est moins coûteux en nombre d'opérations, mais nécessite un plus faible pas de temps. C'est un choix qui n'a jamais vraiment posé de problème, ayant l'habitude de prendre un facteur de sécurité très grand pour la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) et donc un pas de temps très faible.

Les équations A.6-A.7 sont intégrées dans l'espace spectrales et l'équation de Navier-Stokes est projetée dans un espace à divergence nulle avec le projecteur : $\Pi(f_k) = f_k - \frac{\mathbf{k} f_k}{k^2} \cdot \mathbf{k}$. On transforme aussi le terme inertiel en un terme de pression et un terme non linéaire. On se retrouve finalement avec les équations suivantes, où tous les termes de pressions disparaissent.

$$\partial_t \hat{\mathbf{v}} - \nu k^2 \hat{\mathbf{v}} = \Pi[\widehat{\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}} + \widehat{\mathbf{j} \times \mathbf{B}} + \widehat{\mathbf{F}}] \quad (\text{A.4})$$

$$\partial_t \hat{\mathbf{B}} - \eta k^2 \hat{\mathbf{B}} = \nabla \times (\widehat{\mathbf{u} \times \mathbf{B}}) \quad (\text{A.5})$$

A.2 Équations fondamentales

A.2.1 Équation de base

Dans les travaux de cette thèse, nous avons intégré les équations de la magnétohydrodynamique incompressible suivantes :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla \mathcal{P} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{F}, \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v} + \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (\text{A.7})$$

avec $\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$; la densité du fluide est supposée constante $\rho = 1$, \mathbf{v} est le champ de vitesse, \mathbf{B} le champ magnétique (redimensionné en vitesse d'Alfvén), $\mathbf{j} = (\nabla \times \mathbf{B})/\mu_0$ est le courant, ν la viscosité, η la diffusivité magnétique, \mathcal{P} est la pression et finalement \mathbf{F} est le forçage qui sera développé dans la section suivante.

Dans les travaux présentés dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à la MHD uniquement incompressible. Cette restriction est motivée par l'étude de la dynamique à haut nombre de Reynolds magnétique des métaux liquides.

A.2.2 Les Forçages

Il y a un grand nombre de façons d'introduire un terme de forçage volumique dans l'équation de Navier-Stokes. Mais il y a deux manières un peu moins artificielles que les autres : forçage à force constante (couple constant) et le forçage à vitesse constante. Ces deux forçages sont présents dans la plus part des dispositifs expérimentaux MHD impliquant des métaux liquides avec des moteurs qui ont généralement la fonctionnalité de tourner à vitesse ou à couple constant. Même si nos forçages dans la boîte périodique ont ces caractéristiques, ils restent tout de même des forçages volumiques qui agissent en tous points du domaine de calcul qui sont éloignés de la dynamique d'une hélice ou d'une pale. Il ne s'agit pas de modéliser parfaitement un dispositif expérimental, mais de retrouver des caractéristiques présent dans ces systèmes. La boîte périodique n'ayant aucun effet de parois, le niveau de modélisation de nos forçages sont consistant avec le niveau de modélisation que l'on peut attendre de la boîte périodique. Il y a peu, ou même pas, de travaux faisant la part des différentes caractéristiques associées à différent forçages dans la boîte périodique. A ma connaissance, il y a eu qu'un petit effort sur le forçage du Taylor-Green comparant l'injection d'énergie pour des forçages à force constante ou à vitesse constante [Nore 2001]. Ce serait clairement une étude à poursuivre.

Dans les travaux de cette thèse, nous avons uniquement utilisé le forçage à force constante. Le codage est très facile, il suffit de rajouter le terme de force dans l'espace réel ou spectral à chaque pas de temps. Nous avons utilisé uniquement les trois différentes configurations qui sont décrite ci-dessous.

A.2.2.1 L'écoulement de Taylor-Green (TG)

Les tourbillons de Taylor-Green vortex [Brachet 1983], ont été largement utilisés comme forçage dans la boîte périodique et représentent un écoulement présentant des propriétés communes avec l'écoulement de Von Kármán [Douady 1991].

$$\mathbf{F}_{\text{TG}}(k_0) = \begin{bmatrix} \sin(k_0 x) \cos(k_0 y) \cos(k_0 z) \\ -\cos(k_0 x) \sin(k_0 y) \cos(k_0 z) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

Pour $k_0 = 1$, cet écoulement comporte 8 boîtes fondamentales, chacune ressemble fortement à un «vortex» de Von Kármán (voir figure A.1), qui est engendré expérimentalement par deux disques en contra-rotation. Cet écoulement de Von Kármán a été l'objet de nombreuses études expérimentales hydrodynamiques [Fauve 1993, Pinton 1994, Cadot 1997, Labbé 1996, Ravelet 2008]; il est utilisé pour son haut taux de turbulence. Ces dernières années, la plupart des expériences ayant été réalisées en France, ce dispositif expérimental a reçu le surnom de «French washing machine». Il a été aussi l'un des tout premier dispositif (VKG) à rechercher l'effet dynamo et a étudié l'induction magnétique dans des écoulements turbulents avec du métal liquide [Odier 1998] (Gallium). Ce dispositif a ensuite été construit à Cadarache par l'équipe de VKS avec du sodium liquide (Von Kármán Sodum). L'équipe

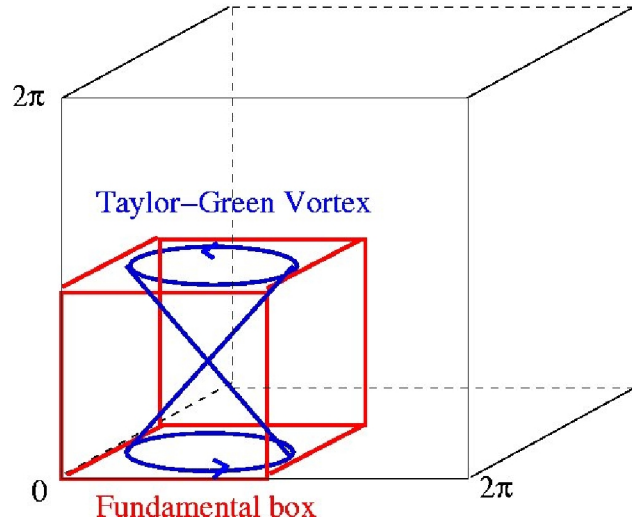


FIGURE A.1 – Représentation d’une boîte fondamentale de l’écoulement de Taylor-Green dans la boîte périodique.

a obtenu une dynamo en 2006 [Monchaux 2007, Berhanu 2007]. L’écoulement de Taylor-Green comportant de nombreuses similitudes avec VKG ou VKS, d’où une grande motivation pour étudier l’induction magnétique ou la dynamo dans un écoulement entretenu par un tel forçage (Chap. 2,3 et 4).

Il est aussi possible de construire un code spectral en utilisant toutes les symétries de l’écoulement du Taylor-Green en contraignant le fluide à évoluer dans la boîte fondamentale empêchant toutes pénétrations des parois. Cette approche permet de gagner un facteur 8 en résolution et il y a été utilisé pour des simulations de la turbulence [Brachet 1983] et de l’effet dynamo [Nore 1997, Nore 2001]. Ce code symétrique a notamment été récemment utilisé pour des études en MHD [Lee 2010] et de nouveaux développements sur l’effet dynamo dans le Taylor-Green symétrique [Krstulovic 2011].

A.2.2.2 L’écoulement ABC (Arnold Beltrami Childress)

Cet écoulement est historiquement utilisé pour les propriétés de ses trajectoires chaotiques [Arnold 1965, Dombre 1986]. Notamment pour l’étude de la dynamo cinématique [Arnold 1983, Galloway 1986, Teyssier 2006, Galanti 1992, Archontis 2003] où l’écoulement est statique, tri-dimensionnel et présente des exposants de Lyapunov bien positif, ingrédient recherché pour l’étude de la dynamo rapide [Childress 1995, Moffat 1985, Bayly 1988, Finn 1988a, Finn 1988b]. De plus c’est un écoulement de Beltrami ou la vitesse est en tout point parallèle à sa vorticité ($\nabla \times V = k_0 V$); il possède donc une hélicité maximale.

$$\mathbf{F}_{ABC}(k_0) = \begin{bmatrix} A \sin(k_0 z) + C \cos(k_0 y) \\ B \sin(k_0 x) + A \cos(k_0 z) \\ C \sin(k_0 y) + B \cos(k_0 x) \end{bmatrix},$$

Nous utilisons l'écoulement ayant un maximum de symétrie $A = B = C = k_o = 1$, mais de nombreuses variantes ont bien sûr été utilisées [Archontis 2003]. Un travail récent [Alexakis 2011], montre qu'un écoulement de type ABC proche des paramètres (5,2,2) produit une dynamo avec le plus fort taux de croissance.

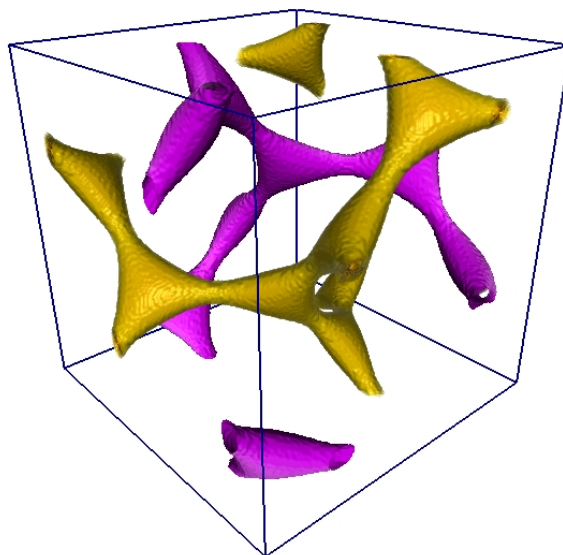


FIGURE A.2 – Visualisation du module du champ de vitesse de l'ABC ($A = B = C = k_o = 1$); en jaune les faibles valeurs du module de la vitesse, (où les points de stagnation de la vitesse sont connectés par des variétés hétéroclines), et en mauve les plus fortes valeurs du module de la vitesse.

Si un des trois coefficients est nul, on se retrouve avec un écoulement de Green Roberts (voir Chap A.2.2.3), qui produit une dynamo lente. Par contre si l'on rajoute une dépendance temporelle à ce système, il devient dépendant que de deux variables d'espaces, mais devient chaotique, car il acquiert trois degrés de liberté dans l'espace des phases. Cet écoulement dérivé de l'ABC est appelé écoulement de Galloway et Proctor [Galloway 1992] et de dimension $2D^{1/2}$. Il a été intensivement utilisé pour l'étude de l'effet dynamo rapide [Ponty 1995].

A.2.2.3 L'écoulement de Green O. Roberts

L'écoulement de Green Roberts est de la famille de l'écoulement ABC (un paramètre égal à zéro). Il a été construit pour produire une dynamo cinématique [Roberts 1972] à partir d'une cellule fondamentale qui comporte quatre «vortex», et ne dépend que de deux variables d'espace. Avec cet écoulement, la dynamo cinématique a été intensivement étudiée analytiquement et numériquement (voir Chapitre 6). Il a surtout inspiré un diapositif expérimental qui a produit une dynamo dans les métaux liquides [Müller 2000, Stieglitz 2001].

$$\mathbf{F} = \left(\sin x \cos y, -\cos x \sin y, \sqrt{2} \sin x \sin y \right). \quad (\text{A.9})$$

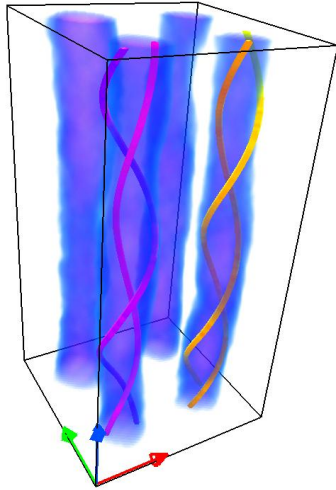


FIGURE A.3 – Visualisation de l'intensité du champ de vitesse de G. O Roberts, les quatre colonnes représentent 75% du maximum de la vitesse et le tracé de la trajectoire de particules de vitesse inversées deux à deux, ce qui donne un réseau de colonnes hélicitaires.

A.2.3 Nombres sans dimension

En mécanique des fluides, la démarche classique est de rendre adimensionnelle les équations étudiées, en faisant apparaître des nombres sans dimension qui sont les paramètres de contrôles du problème. La stratégie que j'ai mis en place au cours de ces dernières années est un peu différente. Nous simulons la forme dimensionnel des équations de la MHD (A.6-A.7), et nous calculons les nombres sans dimension *a posteriori*, en utilisant les quantités provenant directement des simulations. Ce n'est vraiment qu'une question de point de vue, car il n'y pas de manière unique d'adimensionner le système d'équation et il est toujours possible de passer d'une représentation à une autre.

Mais cela fait plaisir de penser, que l'on travaille avec une vitesse en ms^{-1} , avec une boîte 2π mètres et une viscosité en m^2s^{-1} , c'est comme simuler une «grande expérience» de métaux liquide. Même si on atteint des valeurs de la vitesse de l'ordre de l'unité et proche des valeurs réels, nous sommes très loin de descendre la viscosité à sa réelle valeur proche celle de l'eau ($\sim 10^{-6}m^2s^{-1}$) pour du sodium liquide. Actuellement, on peut atteindre des valeurs de 10^{-2} à $10^{-3}m^2s^{-1}$, valeurs qui sont finalement plus proches de la viscosité de la molasse ($1m^2s^{-1}$) ou du miel ($10^{-1}m^2s^{-1}$). Pourquoi ne pas faire des expériences dans du miel conducteur !

En choisissant *a posteriori* les quantités représentatives, cela nous permet de définir les nombres sans dimension les plus pertinents pour un problème donné. La

	$B(T)$	R_e	R_m	P_m
Terre	10^{-4}	10^9	$4 \cdot 10^2$	$3 \cdot 10^{-7}$
Soleil	10^{-4}	$6 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^8$	$3 \cdot 10^{-8}$
Galaxie	10^{-10}	$2 \cdot 10^9$	10^6	$5 \cdot 10^{-4}$
Expérience Sodium	10^{-2}	$5 \cdot 10^6$	50	$6 \cdot 10^{-6}$
Expérience Gallium	10^{-3}	$4 \cdot 10^5$	1	$1.5 \cdot 10^{-6}$
Numérique		$1 - 10^4$ (DNS)	$1 - 10^3$	$10^{-3} - 10^3$

TABLE A.1 – Ordre de grandeur des principaux nombres sans dimension, dans les dynamo naturelles, expérimentales et numériques.

conséquence est une multitude de différentes définitions dans les différents travaux même au sein d'un même groupe.

Dans cette thèse, nous avons souvent défini les nombres sans dimension classiques comme le nombre de Reynolds cinétique, comme $R_e = \frac{LV}{\nu}$ avec une vitesse caractéristique V , et une échelle caractéristique L , en prenant la viscosité cinématique ν . Généralement, nous avons choisi de prendre pour V la vitesse moyenne calculée en fonction de l'énergie cinétique totale du fluide $V_{rms} = \sqrt{2E_v}$ avec E_v qui moyennée temporellement. Nous choisissons aussi une échelle caractéristique qui est l'échelle intégrale turbulente présente dans la simulation définie par $L_{int} = \frac{1}{E_v} \sum \frac{E_v(k)}{k} dk$ qui mesure l'échelle des plus gros tourbillons, où $E(k)$ représente la densité d'énergie unidimensionnelle, l'échelle de Taylor où la dissipation commence à affecter les structures du fluide $\lambda = \sqrt{5E_v/\Omega_v}$, avec l'entrophie $\Omega_v = \frac{1}{2} \int (\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))^2 dx^3$. Dans un régime de turbulence développée homogène et isotrope, la relation entre les deux nombres de Reynolds $R_\lambda \sim \sqrt{R_v}$.

Il y a deux autres nombres sans dimension importants pour la dynamo. Le premier est le nombre de Reynolds magnétique $R_m = \frac{LV}{\eta}$ qui représente le rapport entre le temps de retournement des tourbillons à grande échelle intégrale (ou temps non linéaire) $\tau_{NL} = \frac{L_{int}}{V_{rms}}$ et le temps de diffusion magnétique $\tau_\eta = \frac{L_{int}^2}{\eta}$. Le nombre Reynolds magnétique pour les expériences de dynamo vaut généralement entre 10 et 200, ce qui implique de nombreux temps de retournement hydrodynamiques pour accomplir 1 or 2 temps de diffusion magnétique. Le second est le nombre de Prandtl magnétique $P_m = \frac{\nu}{\eta}$ mesure le rapport du temps de diffusion du champ magnétique et le temps de dissipation visqueuse $\tau_\nu = \frac{L_{int}^2}{\nu}$. Ce nombre est très faible de l'ordre ($10^{-5} - 10^{-6}$) dans un métal liquide, il représente aussi le rapport des nombres de Reynolds magnétique et cinétique. Il faut ainsi cela nécessite atteindre de haut nombre de Reynolds cinétique pour obtenir l'instabilité dynamo.

A.3 Modèle de turbulence sous mailles

Les plus grandes simulations de l'équation de Navier-Stokes sont désormais de l'ordre de 4096^3 points de grille [Kaneda 2003]. Avec une telle résolution les nombres de Reynolds cinétique atteignent pas plus de $R_v \sim 65000$ et $R_\lambda \sim 1200$. Nous

sommes bien loin du minimum de $R_v \sim 10^6$ nécessaire pour produire une dynamo dans le régime de faible nombre de Prandtl magnétique des métaux liquides. Une façon de contourner cette difficulté est de modéliser l'influence des échelles non résolues, car en dessous de la maille de la grille de calcul, avec des techniques dites « Large Eddy Simulations » (ou LES) [Lesieur 1996, Meneveau 2000, Piomelli 1999, Sagaut 2003]. Ces techniques sont largement utilisées dans un contexte de mécanique des fluides appliquées, comme dans les sciences de l'atmosphère ou les turbomachines. Ces techniques sont beaucoup moins utilisées en géophysique et en astrophysique, il y a donc clairement des projets à envisager dans ce domaine.

En contrôlant les transferts d'énergie entre les échelles inertielles résolues et les échelles non résolues (En particulier en supposant un taux de dissipation constant (Fig. A.4)), on peut utiliser le modèle de [Chollet 1981, Lesieur 1997, Métais 2000] où la viscosité dépend du module du nombre d'onde \vec{k} . La viscosité turbulente du modèle s'écrit $\nu(k, t) = \nu_0 H(k) \sqrt{\frac{E(K_{max}, t)}{K_{max}}}$ où $H(k)$ est appelé fonction «cups» égale à l'unité aux grandes échelles résolues et qui augmente pour des nombres d'onde proches de la coupure (K_c de la modélisation). Le coefficient ν_0 dépend du forçage et de la constante de Kolmogorov.

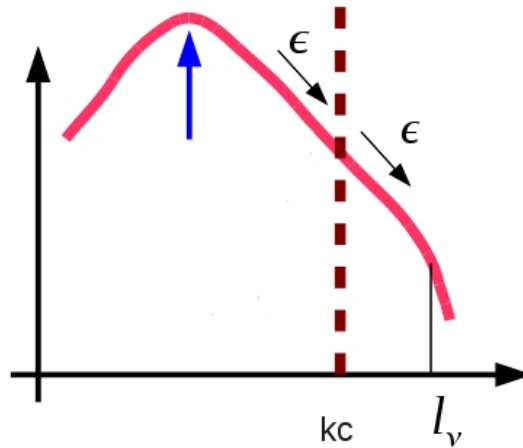


FIGURE A.4 – Spectres d'énergie isotrope d'un écoulement turbulent, et représentation de l'échelle de coupure Kc au milieu des échelles inertielles, les échelles «sous maille» sont modélisées par des termes de transferts d'énergie, locaux et non locaux.

La viscosité turbulente peut être dérivée d'une solution de fermeture EDQMN [Pouquet 1976], la plupart des modèles prenant généralement en compte une forme approximative du calcul des transferts d'énergie [Chollet 1981]. Mais il est possible de garder tous les termes de la fermeture dans un calcul intégral-différentiel, et d'obtenir un système complet [Baerenzung 2008b, Baerenzung 2008a, Baerenzung 2010]. Cette approche permet de ne pas contraindre un taux fixe de dissipation et d'avoir un modèle dynamique permettant une modification des transferts d'énergie par des forces supplémentaires comme la force de Lorentz, ou une forte rotation. Ces modèles LES ont aussi été comparés à un modèle sous maille de type «al-

pha» [Holm 2002, Montgomery 2002, Minnini 2005]. Ces deux types de modèle sous maille, nous ont permis d'étendre notre étude à des régimes à plus grand nombre de Reynolds cinétique et à plus faible nombre de Prandtl magnétique (chap. 3).

A.4 diagnostics

Dans les expériences de laboratoire ou dans des simulations numériques, les données acquises permettent au physicien d'analyser et d'interpréter le phénomène observé. Pour l'expérimentateur, l'acquisition de données est souvent la partie la plus difficile à mettre en place, car il faut observer sans affecter le système et souvent dans un milieu opaque, comme les métaux liquides, ou difficile d'accès. Il en est de même pour la simulation, le numéricien passe la plus part de son temps à mettre au point les sorties des données, issus de la grille de données et les diagnostics. Contrairement aux expériences de laboratoire, le numéricien dispose de toutes les données de la grille de calcul à chaque pas de temps. et peut imaginer toutes sortes de diagnostics. C'est l'idéal par rapport à une expérience mais en mécanique des fluides, les simulation sont bien loin de pouvoir approcher les régimes turbulents réalistes (voir table A.1). C'est le paradoxe du numérique, nous avons donc une loupe grossissant et même toutes les données sur des régimes hydrodynamiques proche d'une tasse de café touillée par une cuillère.

Lors de simulation bi-dimensionnel, ou tri-dimensionnel avec de basse résolution spatiale, on peut garder un maximum de données pour éventuellement faire des diagnostics a posteriori. Au vu de résultats préliminaire, on peut imaginer ensuite des diagnostics plus adapter au résultats. Mais la possibilité de garder toutes les données d'une simulation à haute résolution devient impossible. En effet les capacités de calcul augmentent et la résolution suit cette évolution. Dans les années 2012-2020, nous utiliserons des grilles de l'ordre de 4096^3 à 8192^3 qui engendreront un bien trop grand flot de données. Le physicien devra faire un choix pour réduire ce flot. Notez qu'un champ scalaire en 4096^3 en double précisions, correspond déjà à 512 Giga octets, et il faut 6 champs scalaires pour une réalisation temporelle MHD (avec les composantes \mathbf{v} et \mathbf{B}) soit plus de 3 Tera octets. Il y a au moins 10^6 pas temps par simulation. On voit bien qu'il est utopique d'imaginer conserver toutes les données générés. Il convient donc pour les plus grosses simulations de prendre un soin particulier des diagnostics inclus durant le calcul « on the fly ». Certains diagnostics peuvent être aussi couteux en temps de calculs, et cela demande aussi de nouvelles stratégies de parallélisation (Chap. A.6). Nous devons réduire les données, mais l'avantage par rapport à l'expérience, est qu'il n'y a pas de restriction sur ce que l'on peut diagnostiquer.

A.4.1 Quantités globales

Les quantités globales sont les quantités physiques intégrées sur tout l'espace. Leurs évolutions temporelle permet une première compréhension de la dynamique de l'écoulement, et notamment le calcul du taux de croissance de l'énergie magnétique.

L'énergie cinétique ou magnétique, l'ensrophie ou la dissipation ohmique sont enregistrées au cours du temps (voir fig. A.5). L'énergie est calculée en sommant tous les points de grille du champ considéré. $E(\mathbf{s}) = \frac{1}{2N} \sum_{i=0}^N s_x^2(x_i) + s_y^2(x_i) + s_z^2(x_i)$. En tenant en compte de la symétrie hermitienne et à partir du théorème de Parseval, on peut aussi sommer dans l'espace spectral, et obtenir le même nombre au dernier digit près (10^{-15} en double précision). C'est d'ailleurs un test de base pour un code spectral.

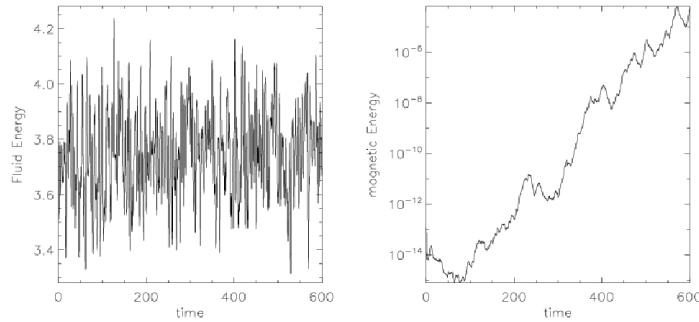


FIGURE A.5 – Évolutions l'énergie cinétique (à gauche) et magnétique (à droite) au cours du temps. A gauche, l'énergie cinétique du fluide est représentée dans une échelle linéaire-linéaire et montre les fluctuations globales du fluide au cours du temps. A droite l'énergie magnétique, représentée dans une échelle linéaire-logarithmique, présente une croissance exponentiellement avec des fluctuations, indiquant un effet dynamo.

A.4.2 Spectres uni-dimensionnel

La densité spectrales unidimensionnelle obtenue par intégration sur des coquilles sphériques est un outil indispensable pour l'analyse de tout écoulements turbulents de mettre en évidence une cascade d'énergie pour les fluctuations d'un champ physique considérées comme isotropes. Elle permet également d'apprécier si la simulation a été suffisamment résolue à travers l'étendue en nombre de décades des spectres d'énergie, d'ensrophie ou de courant. Lorsque le champ est fortement anisotrope (comme dans le cas d'un écoulement soumis à une forte rotation ou l'application d'un fort champ magnétique uniforme), on peut construire des spectres réduits uni-dimensionnel suivant les 3 directions de l'espace spectral ou des spectres construits suivant les directions parallèle ou perpendiculaire à la direction de l'anisotropie dans l'espace spectral (respectivement, par intégration sur des coquille cylindriques le long de la direction anisotrope ou sur des coquilles annulaire dans les plans perpendiculaire à cette direction) [Bigot 2008b, Bigot 2008a].

Les spectres isotropes sont construits en sommant l'énergie des modes sur des coquilles sphériques dans l'espace spectral, de rayon et d'épaisseur $dk = 1$ (voir Fig. A.6). On remarquera que les coquilles sphériques ne peuvent remplir tout le

cube spectral, au delà de la dernière coquille $k = kmax$ il reste des modes près des sommets du cube spectral. La technique habituelle est de replier ces modes sur la dernière coquille. Cela certes l'inconvénient de provoquer une légère remontée du spectre sur le dernier nombre d'onde, mais permet de retrouver l'énergie total du champ $\sum_k E_v(k) = \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$.

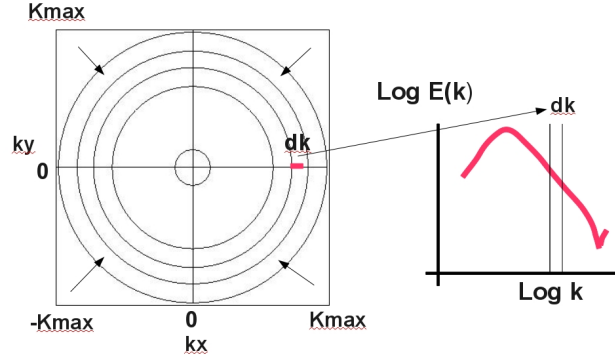


FIGURE A.6 – Représentation des coquilles spectrales permettant de construire la densité spectral unidimensionnelle et isotrope

Ces spectres donnent une bonne indication de l'échelle des plus grandes structures énergétiques. L'échelle intégrale du fluide est ainsi calculé à partir du spectre de l'énergie cinétique ($L_{int} = \frac{1}{\sum_k E_v(k)} \sum_k \frac{E_v(k)}{k}$).

A.4.3 Résolutions : Cauchemar sur la grille

Cette partie est un des cauchemars des numériques, car il s'agit d'évaluer si la résolution de la simulation est suffisante : y a-t-il suffisamment de points de grille pour que les plus petites échelles soient correctement résolues et, notamment l'échelle de dissipation à partir de laquelle toute l'énergie va être dissipée. Pour répondre à cette question importante plusieurs «recettes» sont utilisées.

La première méthode est de regarder le spectre d'énstrophie. En effet, l'équation bilan d'énergie pour un fluide s'écrit : $\partial_t E = I - 2\nu\Omega$ où $\Omega = \frac{1}{2} \int (\nabla \times \mathbf{v})^2$ avec un terme d'injection d'énergie I (où l'on retrouve le forçage) et un terme de dissipation (proportionnel à l'énstrophie). Le spectre d'énstrophie a son maximum au début de la zone de dissipation. Il faut donc regarder sur combien de décades (en représentation logarithmique-logarithmique) s'étend l'amplitude de la densité spectrales et l'extension en nombre d'onde de la zone dissipative après le maximum d'énstrophie. Ce critère donne une bonne indication de la résolution des échelles dissipatives. Dans la Fig. A.7, deux spectres de l'énstrophie pour un même écoulement turbulent en utilisant, deux résolutions différentes (512^3 et 1024^3). Le spectre à faible résolution

laisse peu de place pour les échelles de dissipation et présente une amplitude spectrale s'étendant sur à peu près une décade entre son maximum et son minimum. La simulation utilisant deux fois plus de points de grille est bien mieux résolue. Le spectre présente une amplitude spectrale couvrant à peu près 3 décades et s'étend sur une décade après le nombre d'onde correspondant à son amplitude maximal. Cette évaluation est confirmée par le deuxième critère suivant.

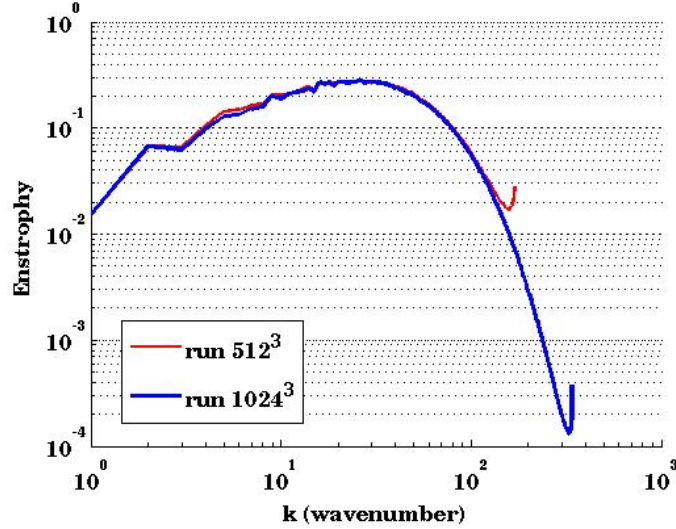


FIGURE A.7 – Représentation en échelle log-log de deux spectres isotropes de l'enstrophie provenant de deux simulations pour un même écoulement MHD en régime stationnaire $\nu = \eta = 3 \cdot 10^{-4}$, en rouge, simulation en 512^3 , en bleu en 1024^3 . A noter que dans la simulation en 513^3 , nous avons $2/3k_{max} \eta_{hydro} \sim 1.21$ en moyenne temporelle et dans la simulation en 1024^3 , $2/3k_{max} \eta_{hydro} \sim 2.41$.

La deuxième méthode est commentée dans [Kaneda 2003], où l'échelle de Kolmogorov η_{hydro} (Symbole communément utilisé par la communauté de turbulence, que je ne utiliserai provisoirement que dans cette section, à ne pas confondre avec la diffusivité magnétique notée η dans le reste du mémoire.) est comparée au nombre d'onde maximum k_{max} (atteint sans déaliasing). L'échelle de Kolmogorov à laquelle le nombre de Reynolds est d'ordre l'unité est estimée phénoménologiquement par $\eta_{hydro} \sim (\frac{\nu^3}{\langle \varepsilon \rangle})^{1/4} = (\frac{2\Omega}{\nu^2})^{-1/4}$ (voir aussi [Frisch 1996, Lesieur 1997]). Avec la règle des 3/2 pour le déaliasing [Orszag 1972a], ($k_{max-dealiasing} = N/3$), Kaneda et al [Kaneda 2003] et des résolutions allant jusqu'à 4096^3 ont montré qu'il n'y avait pas de grande modification si l'on avait $k_{max-dealiasing} \cdot \eta_{hydro} \sim 1$ ou ~ 2 . Actuellement les numériciens adoptent par prudence la deuxième relation

$$2/3k_{max} \eta_{hydro} \sim 2/3k_{max} \left(\frac{2\Omega}{\nu^2}\right)^{-1/4} \sim 2 \quad (\text{A.10})$$

comme limite à ne pas franchir (voir Fig. A.7) pour garantir la résolution de la simulation dans le cas périodique. Dans [Kaneda 2003] un effet de «bottleneck» (ou

goulet d'étranglement) est visible avant l'échelle de dissipation, où l'énergie s'accumule et forme une bosse dans un spectre d'énergie compensé par $k^{5/3}$. On pourrait penser que cette effet «bottleneck» est peut être dû à un manque de résolution des échelles dissipatives. En effet l'énergie ne pouvant pas être suffisamment dissipée, elle s'accumule en amont de l'échelle de dissipation. Mais des simulations MHD bien mieux résolues que le critère (A.10) ne présentent pas de diminution de cet effet «bottleneck». Par contre pour une diminution drastique du critère, conduit clairement à une augmentation du «bottleneck» [Minnini 2011]. Jusqu'à preuve du contraire le critère (A.10) reste valide. Le cauchemar ne s'est pas complètement dissipé!

A.4.3.1 Et la MHD alors !

Le critère (A.10) est basé sur η_{hydro} , échelle de coupure visqueuse estimée selon la phénoménologie de Kolmogorov pour un écoulement turbulent. A nombre de Prandtl magnétique bien plus petit que l'unité, l'échelle de dissipation ohmique est plus grande que l'échelle de dissipation visqueuse, le critère l'hydrodynamique (A.10) reste le plus contraignant.

Mais en turbulence MHD à des nombre de Prandtl magnétique de l'ordre de l'unité, différentes échelles caractéristiques de dissipation peuvent être prises en compte selon la phénoménologie adoptée pour décrire l'écoulement. En effet, les équations de la MHD en symétrisant lorsque les variables d'Elsasser $z^\pm = v \pm b$ sont utilisées leur linéarisation, autour d'un champ magnétique uniforme b_0 et une vitesse caractéristique u_0 , met en évidence la présence d'ondes d'Alfvén contra-propagatives le long du champ b_0 sous jasant. La présence d'un champ magnétique local ou à grande échelle a un effet dynamique significatif sur l'écoulement, conduisant à un ralentissement des transports d'énergie dans la zone inertielle (les temps de transfert d'énergie à une échelle donnée sont modifiées en tenant compte du temps de propagation des ondes d'Alfvén à cette échelle) [Iroshnikov 1963, Kraichnan 1965]. Cette approche phénoménologique dite IK, et celle de Kolmogorov K41 se généralisent au cas anisotrope ; hors propos de ce mémoire.

Pour la turbulence MHD isotrope (où les fluctuations magnétiques b_{rms} sont vues comme un champ magnétique uniforme b_0) et dans le cas simple d'un nombre de Prandtl magnétique unité, le choix de la phénoménologie adéquate est essentiellement lié au degré de corrélation des fluctuations cinétiques et magnétiques et leurs intensités relatives.

Dans le cas des faibles corrélations et de faible fluctuation magnétique v_{rms} et b_{rms} , on peut choisir la phénoménologie de Kolmogorov qui conduit à l'échelle qui conduit à l'échelle de coupure visqueuse de l'ordre de $(\frac{\nu^3}{\langle \varepsilon \rangle})^{1/4}$ (où ε est le taux de transfert moyen d'énergie cinétique et magnétique supposée présenter un comportement spectral comparable) identique à celle utilisée dans le critère (A.10).

Si les fluctuations b_{rms} sont plus grandes ou du même ordre que les fluctuations u_{rms} , leur corrélation restant faible, l'approche phénoménologie IK permet d'estimer une échelle de coupure visqueuse $(\frac{\nu^2 b_0}{\langle \varepsilon \rangle})^{1/3}$ ($b_0 \sim b_{rms}$) remplaçant η_{hydro} dans (A.10).

Dans le cas où le degré de corrélation des fluctuations cinétiques et magnétiques n'est plus négligeable, on peut considérer les variables d'Elsasser se comportant de façon similaire. Suivant la phénoménologie IK, deux échelles de dissipation caractéristiques (l^- et l^+) peuvent alors être estimées à partir des champs z^+ et z^- ; le critère (A.10) est alors remplacée par une de ces deux échelles caractéristiques. Si une des deux échelles conduit à un critère plus sévère, on devra retenir ce dernier (voir [Pouquet 1987]).

A.4.4 Sondes

Le fait d'avoir toutes les données numériques à disposition et de créer des diagnostics globaux, n'arrange pas la communication avec nos collègues expérimentateurs ou observateurs. Il faut donc trouver des diagnostics communs pour pouvoir concrètement comparer les données. Introduire une sonde dans un cube numérique a été une première approche indispensable en mesurant les variations temporelles des champs physiques en un nombre de point de la grille de calcul. L'implémentation dans le code est généralement facile (un peu moins pour un code parallèle), mais le bénéfice est grand. Avec un signal temporel, nous pouvons utiliser tous les outils et les techniques d'analyse des expérimentateurs. A ma grande surprise, je n'ai pas trouver de référence qui utilise numériquement une sonde de vitesse et traite le signal temporel comme dans une expérience. Dans le chap 2, nous avons fait peut être une première ?

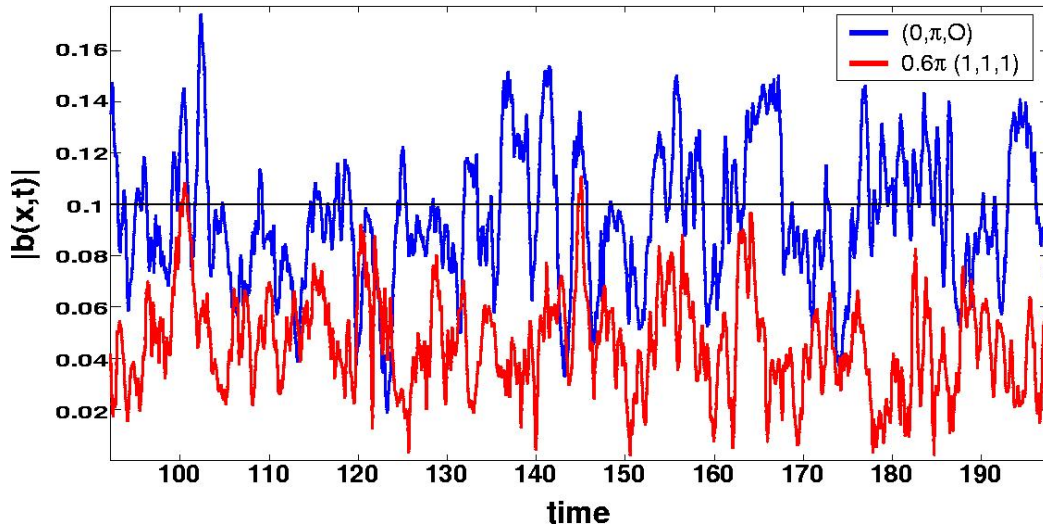


FIGURE A.8 – Enregistrement temporel de l'intensité du champ magnétique induit en deux points fixes de la boîte périodique.

A.4.5 Visualisation tri-dimensionnelle

La visualisation tri-dimensionnelle est la partie qui fait ressortir l'artiste caché dans chaque numéricien. Il est important de visualiser l'écoulement, ses structures, ses lignes de courant. Mais le fait de pouvoir maintenant utiliser des logiciels performants comme Vapor [Clyne 2005a, Clyne 2007, Clyne 2005b] ou Paraview (paraview.org) permet de visualiser ces champs 3D avec une touche d'esthétisme, où le beau, le mélange de couleur et de texture ne nuit pas à l'utile.

Il est difficile de visualiser un champ tri-dimensionnel vectoriel, et on préférera un champ scalaire, généralement en prenant simplement le module de la vitesse, l'enstrophie ou les courants électriques. Les structures visualisées sont riches en renseignement à travers des iso-surfaces, ou du «volume rendering» (nuage vaporeux de point de différentes intensités de couleur). Les nuages de vecteurs ou les lignes de courant sont un des outils pour estimer la géométrie d'un écoulement.

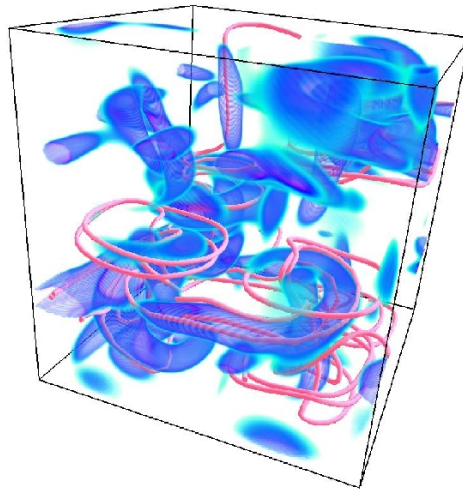


FIGURE A.9 – Visualisation de l'énergie cinétique d'une fluide par «volume rendering» et de lignes de courant de la vitesse.

Même si nos outils de visualisation nous proposent une certaine interactivité, il faut clairement penser le traitement de données tri-dimensionnelles avec un nouveau paradigme où l'interactivité avec les données serait au centre de l'outil de visualisation. Nous nous sommes rapproché récemment d'une équipe spécialiste en visualisation 3D et interactive de l'INRIA de Sophia-Antipolis. L'utilisation de murs d'images avec stéréoscopie et de caves d'immersion, agrémenter d'un outil logiciel interactif performant sont l'avenir de cette activité.

A.4.6 Moyenne temporelle et champ moyen

Il s'agit de moyenner un champ scalaire ou vectoriel au cours de la simulation $\langle \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dt$. C'est un diagnostic qui est similaire aux pratiques des expérimentateurs qui avec des techniques de visualisation du champs de vitesse par des photographies à différents temps de pause, ou utilisant des techniques plus sophistiqués comme la vélocimétrie à laser doppler [Marié 2004] qui permettent de faire des cartes de vitesse moyenne et ensuite de construire un champ tri-dimensionnel. Numériquement, le calcul est simple, il suffit d'additionner un champ dans l'espace spectral ou réel et de le moyenner à la fin de la simulation. La visualisation d'un champ de vitesse turbulent à un instant fait toujours plaisir à voir, mais ne donne pas beaucoup d'informations (Fig. gauche A.10). Par contre le champ de vitesse obtenu par moyenne temporelle met en évidence la structure de l'écoulement aux temps longs. En générale, on retrouve le forçage, avec des circulations supplémentaires dues à la non linéarité de l'équation de Navier-Stokes. Pour étudier la dynamo cinématique, ce diagnostic s'avère crucial. En effet le champ magnétique peut vivre sur des échelles de temps bien plus longues que le temps retournement hydrodynamique, il est donc affecté par le champ moyen de l'écoulement (chap. 3).

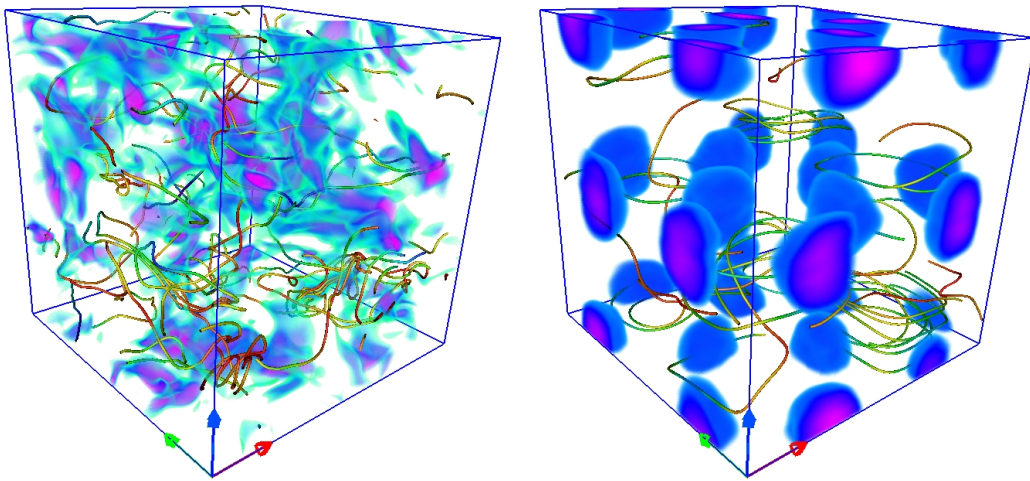


FIGURE A.10 – Visualisation des grandes valeurs de l'énergie cinétique du champ de vitesse turbulent, produit par un forçage de Taylor-Green (Annexe A.2.2.1) avec une simulation en 256^3 . Les deux images montrent les grandes valeurs de l'énergie par «volume rendering», agrémenté de ligne de courant de vitesse. A gauche, instantanée et à droite champ statique obtenu par la moyenne temporelle de toutes les composant du champ de vitesse lors de la simulation $(\langle v_x(\mathbf{x}) \rangle, \langle v_y(\mathbf{x}) \rangle, \langle v_z(\mathbf{x}) \rangle)$. On retrouve bien la structure des 8 boîtes fondamentales du Taylor-Green.

A.5 Parallélisation

J'ai commencé à m'intéresser à la programmation parallèle en février 2001, juste après l'obtention de mon poste de Chargé de Recherche au CNRS. C'est avec Annick Pouquet que nous avons imaginé faire un code parallèle où le domaine serait coupé en bâtonnet pour que les champs et les calculs puissent rentrer facilement dans le cache de la mémoire. Mais ce découpage n'a été finalement construit que très récemment. En effet, Annick Pouquet a pu avoir une copie du code hydrodynamique de Maurisse Meneguzzi et j'ai pu rapidement m'en inspirer pour construire mon propre code, avec un découpage du domaine en tranche (A.5.3). En 2002, j'ai obtenu un financement d'Action Incitative jeune chercheur du CNRS/SPI (Science Physique pour l'ingénieur devenu l'INSIS) qui m'a permis de construire ma première ferme de calcul avec Patrick Michel («my officemate»). Nous avons acheté des PC (bi-processeurs) connectés avec un réseau à 100Mbytes/s dans un premiers temps, puis avec un passage au GBytes/s l'année d'après. Nous avons surnommé notre cluster «Madness» (voir Fig. A.11) . Nous étions les premiers à l'Observatoire à vraiment acheter et utiliser un clusteur parallèle. Il y avait eu des clusters des planétologues, mais qui était remplis de travaux séquentiels, où sur lequel seul Jean-Marc Petit avait fait des tests de code parallèle avec une bibliothèque ancêtre de MPI (Message Passing Interface). Nous étions donc vraiment les premiers à utiliser intensivement nos codes parallèles pour mener nos travaux de recherche. Plusieurs années auparavant, il y avait eu des programmes codés pour la connexion machine de Sophia Antipolis par Hans Scholl. Eqbert Zienichie post-doc d'Hélène Politano et Annick Pouquet avait programmé un code spectral avec une bibliothèque propre à la machine parallèle T3E de l'IDRIS. Mais ces programmes étaient trop dépendants de bibliothèque ou d'architecture spécifiques et obsolètes.

Le cluster «Madness» semble maintenant «pathétique» et désuet (Fig. A.11), mais il y a 10 ans, il nous a permis de nous confronter avec les premiers calculs parallèle et d'acquérir l'expérience nécessaire pour calculer maintenant sur les plus grands clusters actuels. Les problèmes d'équilibre entre le temps de calcul et le temps de communication ont été mis en évidence avec les 2 versions successives du réseaux d'interconnexion que nous avons achetés. Par la suite l'Observatoire a acquis des ordinateurs parallèles plus puissants (SIVAM I et SIVAM II), qui ont suivi d'expérience et de base de lancement à l'acquisition du mésocentre actuel de 1800 coeurs (<http://crimson.oca.eu>).



FIGURE A.11 – Cluster MADNESS (**M**achine **A**ctively **D**evoted to **N**umerical **E**xperiments and **S**ophisticated **S**imulations) comportant 8 PC bi-processeurs AMD Athlon (1.8 GHz/proc) reliés par un réseau Gbytes, achetés en 2002. Ce cluster nous a permis de plonger dans l'univers du calcul parallèle.

A.5.1 Penser Parallèle

Le domaine de calcul est généralement découpé en parties égales. Les clefs pour comprendre comment construire un code parallèle, sont de réaliser que le cube est découpé et distribué sur chaque processeur, et que le domaine entier n'existe plus comme dans un programme séquentiel. Il faut aussi réaliser que chaque processeur lit le même code, donc chaque fonction ou sous-programme doit être penser pour tous les processeurs en même temps. Nous ne sommes pas dans une configuration de communication Maître-Esclave, mais plutôt dans une approche plus démocratique, où les processeurs sont égaux, font généralement la même chose, et parfois des actions spécifiques selon le morceau du domaine sur lequel ils doivent travailler. Avec la bibliothèque MPI (Message Passing interface), chaque processeur connaît son propre numéro et le nombre total de processeurs utilisés. Avec cette bibliothèque, qui comporte une interface pour une communication de processeur à processeur (local) et aussi des communication globales, il devient facile de faire parler les différentes parties du domaine, de rassembler ou de distribuer des données. Cette bibliothèque s'est un peu enrichie avec le deuxième version notamment la prise en compte de la lecture ou de la sauvegarde sur fichiers.

A.5.2 Entrées-Sorties en Parallèle (MPI-IO)

C'est une partie que j'ai implanté plus tard vers 2004. En effet, chaque processeur écrivait ou lisait dans un fichier qui lui était propre et, à la fin de la simulation des scripts rassemblaient les données. Mais lorsque l'on commence à utiliser au delà de 512 processeurs, le nombre de fichiers devient trop grand. J'ai eu des problèmes avec la limite inode sur certain cluster. Il devenait nécessaire d'introduire les nouvelles fonctionnalité de la bibliothèque de MPI version 2, l'écriture ou la lecture sur un seul fichier par tous les processeurs en même temps. Je me rappelle avoir fait une grande partie du travail dans un avion Londres-Denver, car j'allais travailler avec Annick Pouquet à Boulder. Ces fonctionnalités peuvent être plus ou moins optimisées par le constructeur et la version de la bibliothèque MPI utilisée. Elles sont maintenant incontournables.

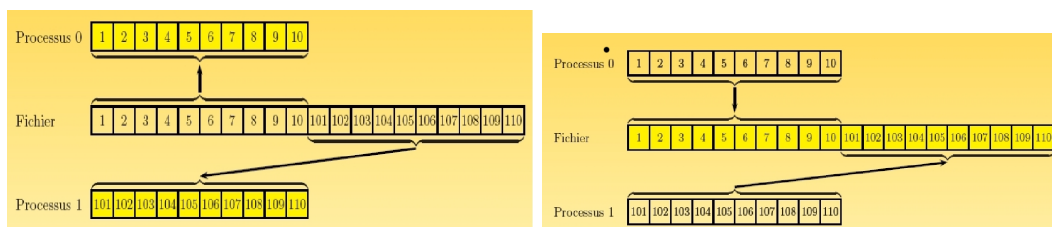


FIGURE A.12 – A gauche, représentation de la fonction `MPI_All_read`, où chaque processeur va lire une partie du fichier et à droite l'équivalent `MPI_All_write` pour écrire dans un seul fichier des morceaux provenant de chaque processeurs.

A.5.3 Découpage de la grille, FFT et optimisation

La grille est découpée et distribuée sur les différents processeurs. La première approche est de découper la grille en tranche (Fig. A.13). Dans cette configuration, la transformée de Fourier tri-dimensionnelle est locale dans chaque tranche pour deux directions d'espace et distribuée dans la troisième direction. Pour pouvoir appliquer la transformée de Fourier dans cette troisième direction, il faut faire une transposition du cube pour avoir toutes les données localement. Cette transposition nécessite une communication globale gérée suivant différentes stratégies : Chaque tranche est coupée virtuellement en un nombre de bâtonnet (pencil) égales au nombre de processeurs (Fig. A.14) et chaque bâtonnet est échangé deux à deux entre deux processeurs. On peut remarquer que la diagonale n'a pas besoin de se déplacer. Une transposition locale de chaque bâtonnet est ensuite appliquée.

Il y a deux manières de programmer cette transposition :

l'une utilise la communication point à point en échangeant deux bâtonnet deux à deux et en laissant la diagonale en place. Pour finir avec la transposition locale. Cette méthode est programmée «maison», on peut essayer d'optimiser en utilisant des communications point à point non bloquantes, ce qui permet de mélanger communication et calcul. Notamment, lorsque l'on veut faire une transformée de Fourier sur un vecteur qui a trois composantes scalaires indépendantes, on peut alterner communication d'une composante avec calcul de FFT local sur l'autre. Il faut bien sûr vérifier l'efficacité d'une telle approche.

L'autre approche est d'utiliser la fonction fournie par la bibliothèque MPI : `MPI_All_to_all`, qui s'occupe elle-même d'échanger les bâtonnets avec sa propre optimisation.

Il est bien d'avoir différentes stratégies, car il n'est pas du tout sûr que celle qui est la plus rapide sur une architecture, le soit sur tout autre cluster.

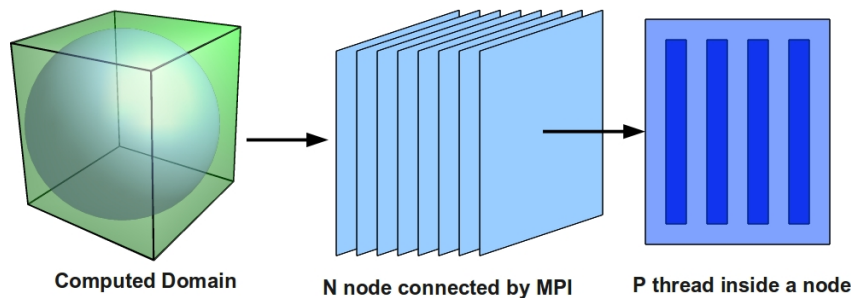


FIGURE A.13 – Décomposition de la grille de calcul en tranches égales, qui peuvent être ensuite gérées localement par multiples processeurs partageant la mémoire.

Nous envisageons aussi, une stratégie qui mélangerait des communications MPI noeud à noeud et qui utiliserait un partage de tâche sur chaque noeud avec les bibliothèques «OpenMP» ou «Multithread». La tranche de la grille serait donc encore découpée au niveau du noeud en fonction du nombre de coeurs par noeud et la transposition se ferait de noeud à noeud (Fig A.13). Cette stratégie est aussi

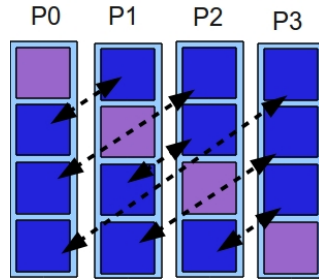


FIGURE A.14 – Représentation bi-dimensionnel de l’algorithme de transposition, impliquant les bâtonnets.

en cours d’étude et d’implantation. Elle suggère une prise en charge plus globale des calculs sur ce découpage hybride (MPI-multithread). Cette stratégie peut être aussi envisagée pour des géométries non complètement périodiques ou des géométrie sphériques. En effet, dans la géométrie du plan (2 directions périodiques + une direction non périodique) ou celle de la sphère (2 directions gérées par les harmoniques sphériques (θ, ϕ) + une direction non périodique (celle du rayon)), on retrouve un découpage en tranche qui pourrait être aussi distribué sur un noeud multi-coeurs et optimisé par des communications «MPI-multithread».

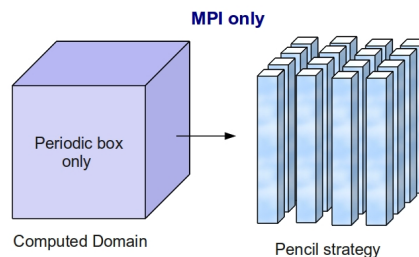


FIGURE A.15 – Découpage en bâtonnet (Pencil)

Une autre façon de découper qui est déjà largement utilisée pour le cube périodique est le découpage en bâtonnets (Fig. A.15). Il y a pas mal d’avantage à se tourner vers ce découpage : Avec un découpage en tranches, il y a une limite au nombre de processeur utilisables. Pour une simulation en N^3 , on ne peut avoir pas plus de N tranches et donc N processeurs. Par contre avec les bâtonnets on peut très facilement dépasser cette limite. Certes, il faut appliquer deux transpositions successives, ce qui implique en théorie plus de communications. Mais la communication se fait sur des données plus grosses que le cas limite des N tranches sur N processeurs, et subit moins les problèmes de la performance de la latence du cluster. Une bibliothèque freeware (P3DFFT) propose cette stratégie (<http://code.google.com/p/p3dfft/>) et elle est utilisée avec succès par certains collègues qui voient leur code rester «scalable», sur plus de 10 000 processeurs pour une résolution de 1024^3 à 2048^3 . Ce découpage et son introduction est notre prochaine priorité dans notre code «cubby».

A.6 Stratégie parallèle pour les diagnostics et l'interactivité de codes multi-physiques

Comme, je l'ai fait remarqué dans le chapitre sur la parallélisation (Chap. A.5), les diagnostics doivent être de plus en plus pris en charge au cours de la simulation. En effet la résolution des simulations augmente avec la puissance de calcul et la masse de données engendrées devient impossible à analyser a posteriori. Mais certains diagnostics peuvent être coûteux en temps de calcul. Nous étudions une stratégie très générique pour permettre de faire autant de diagnostics au cours de la simulation, sans affecter le temps réel de calcul.

Lors d'une simulation avec une résolution fixée, il y a toujours un nombre de processeurs qui est le plus efficace, soit pour le temps réel de la simulation ou pour le temps mono-processeur. Même avec une grande «scalabilité», un code voit sa balance calcul-communication se heurter à une limite d'efficacité. En se mettant dans la configuration la plus favorable pour le code fluide ou MHD, il faut maintenant produire des diagnostics sans trop affecter l'efficacité et la scalabilité. La solution est très simple à imaginer, mais un peu plus compliquée à introduire. Il suffit de construire un environnement MPI virtuel, où chaque tâche est gérée par un sous-espace de noeuds indépendants. Le code fluide tourne sur un sous-espace MPI avec un nombre idéal de processeurs et communique les données nécessaires aux autres codes qui sont indépendants et tournent eux-mêmes dans d'autres sous-espaces. Ils sont tous mis en relation, par exemple, à travers une interface de communication (voir Fig. A.16). Une fois les données transmises à cette interface, le code fluide peut continuer son chemin et, de manière indépendante et en parallèle, les codes de diagnostics peuvent travailler sur leur espace de processeurs indépendants. Il y a donc une parallélisation des tâches. Dans les architectures de cluster actuels, le nombre de processeurs est toujours bien plus grand que le nombre de processeurs efficaces pour une résolution et un code fluide donnés, on peut donc facilement en rajouter pour gérer les diagnostics un peu lourds. Ce système permet, pour un même temps de calcul réel, d'avoir des diagnostics avancés tout les n pas de temps, comme le calcul des incréments, des visualisations de champs physiques tri-dimensionnelles ou même des sorties de champs tri-dimensionnels.

Ce principe peut être facilement étendu en reliant différents codes physiques, pour étudier des systèmes plus complexes qui nécessitent par exemple les données du vecteur vitesse, en calculant les trajectoires de traceurs avec différentes propriétés. L'étape suivante est la mise en relation de codes qui gèrent des parties différentes de systèmes physiques lourds, impliquant de nombreux différents processus physiques ou chimiques interagissant entre eux. Cette interactivité multiple posera des problèmes de chronicité, mais permettra de distribuer la simulation sur bien plus de processeurs et d'étudier des systèmes complexes multi-physiques de plus en plus proches de situations réelles.

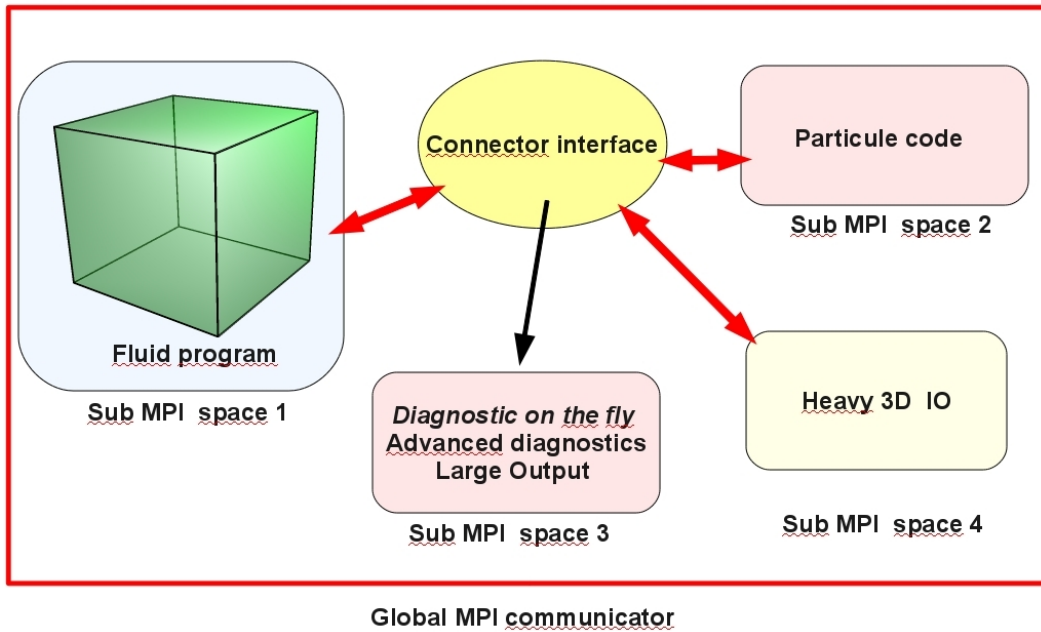


FIGURE A.16 – Diagramme montrant le principe, de communication inter code.

A.7 Outils d'aide à la programmation

En 2006, une rencontre changea ma façon de programmer et mes méthodes de travail. En effet, Alain Miniussi ingénieur de recherche, a pris la direction technique du mésocentre hébergé par l'Observatoire. Il m'a initié aux méthodes de travail en génie logiciel et à l'utilisation d'outils d'aide à la programmation. Après avoir intégré ces techniques, je me demande après coup comme j'avais pu travailler sans ! Nous travaillons ensemble sur ce code, qu'il a pratiquement ré-écrit (j'avais la naïveté de croire que je programmais en langage C++). Son apport sera majeur, surtout pour une programmation objet où les fonctions basiques qu'utilise le physicien seront transparentes quant à la façon de paralléliser ou d'optimiser le code en le séparant en une bibliothèque ayant aux moins deux niveaux d'abstraction (chap. A.8).

A.7.1 Trac et subversion (svn)

Lorsque l'on commence la programmation d'un code, la première étape est d'avoir un outil prenant en charge les différentes versions. Le programmeur passe son temps à changer, rajouter, modifier du code. Il essaye de le tester au fur et à mesure, mais il est possible qu'un seul changement puisse polluer une grande partie du code. Cela devient encore plus nécessaire lorsque plusieurs personnes travaillent sur le même code. Nous utilisons le serveur de version : «subversion» dit «SVN» (<http://subversion.tigris.org/>), qui est un software opensource, et s'installe sur pratiquement toutes les plateformes. Il permet de garder incrémentalement les modifications des programmeurs et surtout de revenir en arrière en cas de problème

majeur (Plus rien ne marche!). En travail d'équipe, cela permet de voir qui a changé quoi et de suivre l'évolution du code. De plus, le serveur de version peut être connecté à une interface web, qui a des outils supplémentaires. Nous utilisons «Trac» (<http://trac.edgewall.org/>) qui intègre le serveur de version «SVN», un wiki où nous pouvons mettre des rubriques, expliquant divers aspects du projet (voir Fig. A.17. Cette interface permet de suivre les différentes branches du projet. Il y a une branche principale et des branches secondaires, où nous pouvons essayer des transformations en profondeur sans affecter la branche principale qui permet la production. Nous pouvons aussi visualiser différents fichiers du code et surtout comparer les modifications entre deux versions (voir Fig A.18). En rouge sont représentées les lignes supprimées et en vert celles rajoutées.

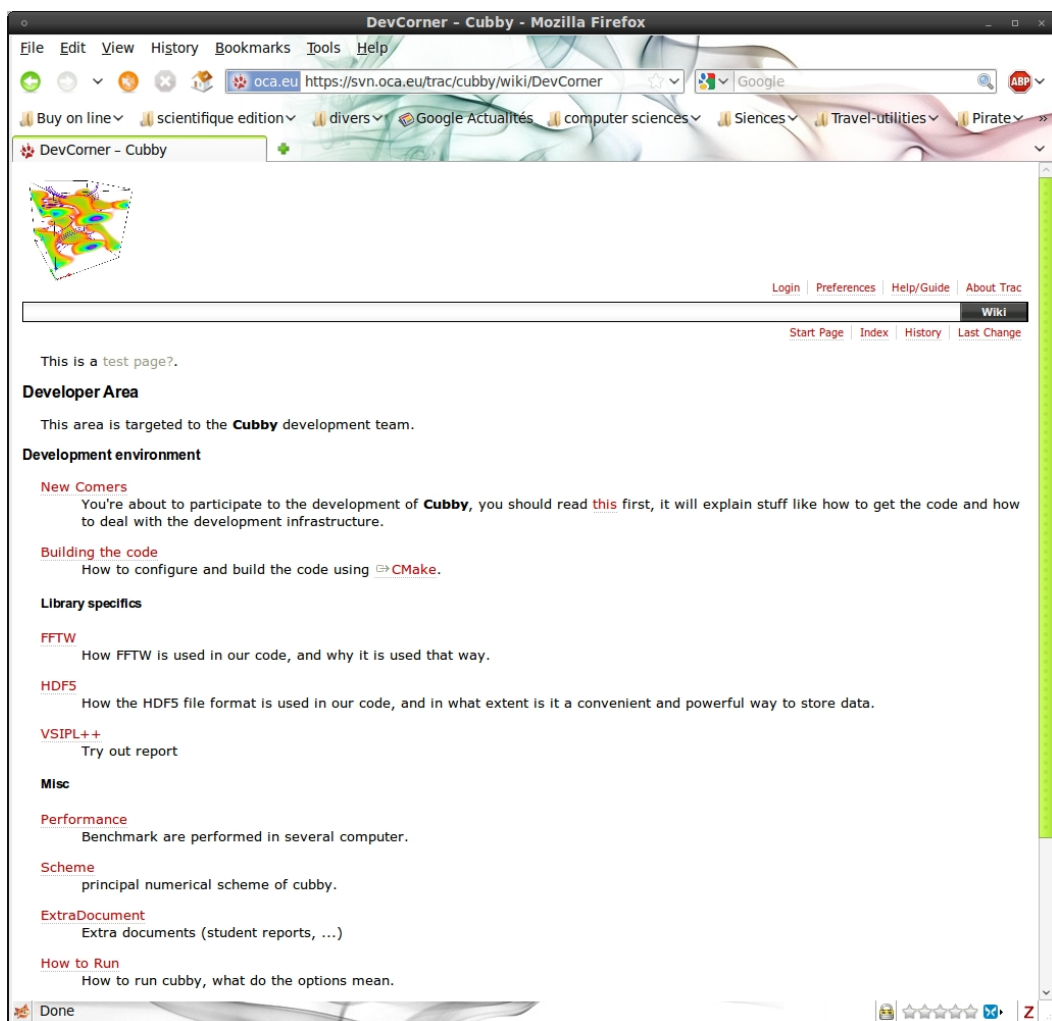


FIGURE A.17 – Copie d'écran du wiki de trac du projet «mhd».

```

274 276
275
276
277
278
279
280
281
282
283
284
277
278
279
280
281
282
283
284
285
286
287
288
289
290
291
292
293
294
295
296
297
298
299
300
301
302
303
304
305
306
307
308
309
310
311
312
313
314
315
316
}
rv(avg_pfluid_d.Wms(space)) = 0;
}
if (avg_pfluid::on()) {
    avg_pfluid::data_type& avg_pfluid_d = avg_pfluid::data();
    rv(avg_pfluid_d.Psims(space)) = 0;
    rv(avg_pfluid_d.Wms(space)) = 0;
}
if (avg_hely::on()) {
    avg_hely::data_type& avg_hely_d = avg_hely::data();
    rv(avg_hely_d.Hm(space)) = 0;
    rv(avg_hely_d.Hms(space)) = 0;
}
}
if (avg_pfluid::on()) {
    avg_pfluid::data_type& avg_pfluid_d = avg_pfluid::data();
    rv(avg_pfluid_d.Psims(space)) = 0;
    rv(avg_pfluid_d.Wms(space)) = 0;
}
if (avg_hely::on()) {
    avg_hely::data_type& avg_hely_d = avg_hely::data();
    rv(avg_hely_d.Hm(space)) = 0;
    rv(avg_hely_d.Hms(space)) = 0;
}
}
}
// - - - - Penalization - - - - -
if (params.physical.penalization_v) {
    field::scalar P_xi(space, "penalization", field::sp_real);
    physic::make_penalization_field( P_xi,
                                    params.physical.penalization_v,
                                    params.physical.radius,
                                    params.physical.DH);
    io_engine->store( P_xi, 1.0, 1.0, est_name("P_xi.dat" ) );
    io_engine->store( P_xi, 1.0, 1.0, "P_xi.dat" );
}
if (params.physical.penalization_f) {
    field::scalar P_xi(space, "penalization", field::sp_real);
    physic::make_penalization_field( P_xi,
                                    params.physical.penalization_f,
                                    params.physical.radius_f,
                                    params.physical.DH_f);
    io_engine->store( P_xi, 1.0, 1.0, est_name("P_force.dat" ) );
    io_engine->store( P_xi, 1.0, 1.0, "P_force.dat" );
}
}
params.fluid.nu_eff = (params.physical.turbulent_viscosity > 1
                    ? params.fluid.nu + params.fluid.nu_min
                    : params.fluid.nu );
out << "After initialisation of v : nu = " << std::scientific << params.fluid.nu
    << " nu_eff=" << std::scientific << params.fluid.nu_eff
    << " nu_min=" << std::scientific << params.fluid.nu_min << std::endl;

```

FIGURE A.18 – Copie d'écran d'éditeur du code source qui compare les changements entre deux versions.

A.7.2 Cmake, compilation automatique

Le code doit pouvoir être compilé facilement sur toutes les plateformes de calcul. Nous utilisons le logiciel «Cmake» qui est opensource, et permet de configurer la compilation pour tout type de cluster. Il permet aussi d'élaborer un espace de test du code (voir chapitre suivant). Nous avons aussi implémenter un script qui détecte automatiquement sur quelle plate-forme nous nous trouvons et configure correctement Cmake pour la compilation. Avec deux commandes : `./preconfigure.sh` et `make`, les bibliothèques et les exécutable du code se compilent automatiquement.

```
ponty@dragon : ~/trunk : ./preconfigure.sh
dragon
dragon is an ubuntu linux system
The build host is ubuntu_os
will configure with : cmake -DBOOST_ROOT :String='/opt/boost/' -DFFTW_ROOT :String='/opt/
Boost root set in /opt/boost/
Boost found in /opt/boost/
Found MPI
compile with flags "" and include dir "/usr/lib/openmpi/include;/usr/lib/openmpi/include/openmpi
and link with "-Wl,-export-dynamic" and Found fftw library in /opt/fftw/
Could NOT find HDF5 (missing : HDF5_INCLUDE_DIR)
Found svnversion
svnversion 2428
Source URL is https://svn.oca.eu/codes/mhd/cubby/trunk
Last change revision is 2428
:
Last Changed Date : 2011-10-25 11 :24 :39 +0200 (Tue, 25 Oct 2011)
Default floating point type for field has been explicitly set to 'double'
Will use auto detection for array assignement implementation.
The restrict keyword is known as __restrict__.
References on c99 array are supported.
NBCORES provided : 2 will run mpi test on 2 unless otherwise specified.
Configuring done
Generating done
Build files have been written to : /home/ponty/trunk
```

```
ponty@dragon : ~/trunk : make
[0%] Generating azur/util/version_2428.cpp
[1%] Generating azur/util/version.cpp
Scanning dependencies of target cubby_util
[1%] Building CXX object src/CMakeFiles/cubby_util.dir/azur/util/version.cpp.o
Linking CXX static library libcubby_util.a
[2%] Built target cubby_util
[27%] Built target jmfft
Scanning dependencies of target azur_util
[27%] Building CXX object src/CMakeFiles/azur_util.dir/azur/util/version.cpp.o
Linking CXX static library libazur_util.a
[30%] Built target azur_util
[31%] Built target azur_array
[43%] Built target cubby_field
[53%] Built target cubby_physic
Linking CXX executable cubby
[62%] Built target cubby
Linking CXX executable transform
[68%] Built target transform
[70%] Built target array_view_perf
[71%] Built target vbd
[72%] Built target dvi
Linking CXX executable bench_fft
[75%] Built target bench_fft
[75%] Built target diff_energy
[76%] Built target diff_float
:
Linking CXX executable test_spectra
[98%] Built target test_spectra
[98%] Built target gen_vtk
Linking CXX executable test_penalization_mask
[100%] Built target test_penalization_mask
```

A.7.3 tests Automatiques

Un autre aspect important pour travailler en équipe sur un code, ou même seul, à implémenter des tests unitaires pour tester toutes les parties importantes du code. Cmake permet de créer cette zone de tests. C'est un peu fastidieux à construire, mais cela simplifie grandement le debogage. Chaque fois qu'une modification est introduite, l'idée est de faire passer tous les tests avant de sauvegarder ces changements dans la base de SVN. Plus, il y a de tests qui recouvrent la plus grande partie du code, plus cela devient efficace. Avec Alain Miniussi, nous partions d'un code existant et voulions le modifier sans affecter les résultats. Cette collection de tests automatiques, est finalement la seule manière de progresser en gardant une continuité.

Voir ci dessous une partie de la sortie de notre code cubby :

```

ponty@dragon : /trunk ctest
Test project /home/ponty/trunk
Start 1 : io
1/70 Test #1 : io ..... Passed 1.38 sec
Start 2 : scl-fft-estim
2/70 Test #2 : scl-fft-estim ..... Passed 1.07 sec
Start 3 : vec-fft-estim
3/70 Test #3 : vec-fft-estim ..... Passed 1.06 sec
Start 4 : scl-fft-exhau
4/70 Test #4 : scl-fft-exhau ..... Passed 7.57 sec
Start 66 : sphere_128_0_9375_smooth

66/70 Test #66 : sphere_128_0_9375_smooth ..... Passed 3.46 sec
Start 67 : cylinder_128_0_9375_0_063_raw
67/70 Test #67 : cylinder_128_0_9375_0_063_raw ..... Passed 3.14 sec
Start 68 : cylinder_128_0_9375_0_063_smooth
68/70 Test #68 : cylinder_128_0_9375_0_063_smooth ..... Passed 2.79 sec
Start 69 : ztorus_128_0_9375_raw
69/70 Test #69 : ztorus_128_0_9375_raw ..... Passed 3.81 sec
Start 70 : ztorus_128_0_9375_smooth 70/70 Test #70 : ztorus_128_0_9375_smooth
..... Passed 3.19 sec

100% tests passed, 0 tests failed out of 70
Total Test time (real) = 356.21 sec
ponty@dragon : /trunk

```

A.8 Perspectives

Depuis juin 2006, avec un ingénieur de recherche du mésocentre de calcul intensif local (UNS/OCA), spécialiste en C++ et génie logiciel, nous nous sommes lancés dans une refonte et une amélioration de la structure objet C++ du code parallèle que j'ai développé en 2001-2002. Nous nous efforçons depuis 2009 de rendre «notre» code beaucoup plus dynamique, de créer des objets génériques "template" qui permettront de construire facilement d'autres algorithmes pour d'autres problèmes ou des équations physiques supplémentaires. Nous allons utiliser les méthodes de programmation objet et des bibliothèque en méta-langage pour la construction d'une bibliothèque d'objets permettant de calculer en parallèle avec MPI, un couplage d'équations aux dérivées partielles (EDP) avec des méthodes pseudo-spectrales. A court et moyen terme, cette bibliothèque pourra être utilisée par mes étudiants et collaborateurs, à long terme, après une phase de validation, une mise à disposition pour la communauté scientifique est envisagée. Notamment, nous nous efforçons de rendre dynamique le fait de choisir le découpage de l'espace de calcul qui est distribué sur les processeurs, selon deux représentations : un découpage en tranches (actuel) ou en bâtonnets (en développement). Le second permettra une plus grande distribution des tâches sur beaucoup plus de processeurs. En effet, la première représentation a une nombre limité de tranche N (si la résolution est N^3). Nous avons aussi en projet de rendre cette bibliothèque accessible aux architectures hybrides (MPI, muti-thread) ou (MPI, GPU) . Cet effort me permettra d'utiliser pleinement les architectures massivement parallèles et d'atteindre des résolutions et des régimes turbulents encore inaccessibles. Notre code est inclu dans un projet plus vaste, qui comprend différentes géométries : (plane, torique et sphérique), ainsi que l'utilisation d'une bibliothèque qui est optimisée pour le GPU et le «multithread». Ce projet sera soumis a une appel d'offre ANR et porte le nom de «MetalSpectral» (Meta Langage for Spectral Method) (voir Fig A.19).

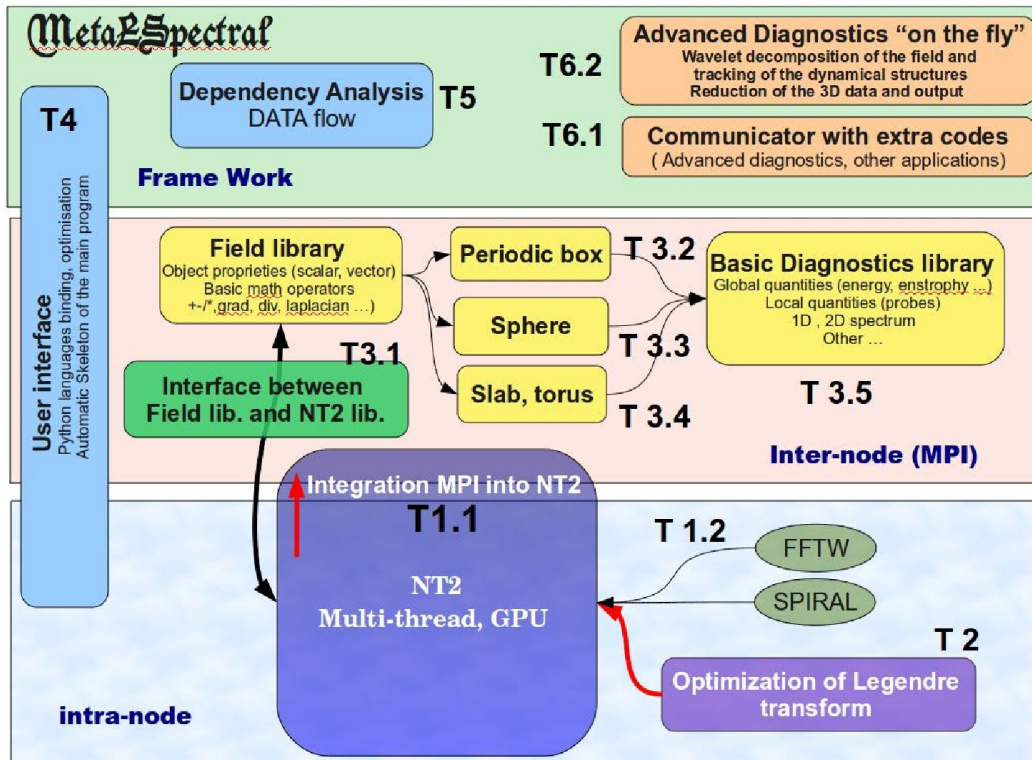


FIGURE A.19 – Notre équipe composée d’informaticiens et de physiciens, est motivé pour construire une bibliothèque en C++ qui permettra de résoudre de nombreux problèmes de physique, en simulant des équations différentielles partielles (PDE) avec des méthodes pseudo-spectrales dans différentes géométries (cube périodiques, plaque, tore ou sphère). Cette bibliothèque sera offerte à la communauté scientifique et nous espérons commencer une synergie, où les utilisateurs pourraient développer leurs propres outils et augmenter la gamme de module de la bibliothèque MetaLSpectral. Elle permettra d’effectuer des calculs intensifs sur tout type d’architecture allant du simple ordinateur portable au calculateur Petaflopique. La construction d’outils permettant une bonne utilisation des machines massivement parallèles devient une priorité, mais nécessite un investissement récurrent. Notre outil pourra s’adapter, sans tout recommencer, aux différentes architectures présentes et même futures. Cette bibliothèque sera facile à utiliser et à mettre en oeuvre. Les utilisateurs n’auront pas besoin d’entrer dans les détails de la parallélisation MPI, GPU ou multi-thread. Les objets (des champ scalaires et vectoriels) construits avec leurs opérateurs mathématiques seront le coeur de MetaLSpectral. Les utilisateurs devront simplement coder leurs schémas temporels et leur système PDE, avec un meta langage de programmation. Une optimisation automatique suivant l’architecture de l’ordinateur sera incluse à un plus bas niveau de la bibliothèque. Une structure suffisamment générique des objets permettra cette dissociation entre optimisation et implémentation, notamment à travers l’élaboration d’interfaces entre des bibliothèques de transformation spectrales (FFT (www.fftw.org), www.spiral.net), transformation de Legendre-Fourier), et une bibliothèque optimisée pour des calculs de bas niveau sur des architectures hybrides GPU, multi-thread et MPI (<http://nt2.metascale.org>).

Publications

Sommaire

B.1 Induction Magnétique	72
B.1.1 Notes personnelles	72
B.2 Dynamo et Seuil	77
B.2.1 Notes personnelles	77
B.3 Seuil et champ moyen	82
B.3.1 Notes personnelles	82
B.4 Forçage de Taylor-Green et effets non-linéaires	94
B.4.1 Notes personnelles	94
B.5 Bifurcation sous critique	106
B.5.1 Notes personnelles	106
B.6 Dynamo intermittentes	112
B.6.1 Notes personnelles	112
B.7 Tous ensembles	120
B.7.1 Notes personnelles	120
B.8 Dynamo à grande et petite échelle	129
B.8.1 Notes personnelles	129

B.1 Induction Magnétique

B.1.1 Notes personnelles

Les résultats de cette publication sont commentés dans le Chapitre 2. Ces simulations furent les premières à mettre en évidence de manière très nette la loi de décroissance du spectre d'induction magnétique en $f^{-11/3}$ et la présence du comportement en f^{-1} à basses fréquences également observé dans de nombreuses expériences d'induction et de dynamo. Mais elles mettent aussi en lumière le fort potentiel de l'utilisation des modèles sous maille en turbulence MHD.

J'ajouterais uniquement une note personnelle sur l'historique de ce travail. L'idée d'utiliser les "Large eddy simulation" pour forcer un spectre d'énergie cinétique est née lors d'une discussion entre J-F Pinton et moi même à l'ENS Lyon en 2000. Nous voulions avoir des propriétés turbulentes du fluide simulé, très proche des écoulements turbulents expérimentaux pour étudier la réponse à un champ magnétique appliqué. Mais numériquement les paramètres atteignables étaient et demeurent bien loin de la réalité. C'est là que Jean-François décrit la méthode dites «LES» et appela sur le champ un des spécialistes en la matière J-P Bertoglio. Nous nous sommes retrouvé l'après-midi même à l'École Central de Lyon pour discuter de ces méthodes, J-P Bertoglio nous a conseillé une méthode très simple à implémenter et à contrôler : le modèle de «Large eddy Simulation» de Chollet-Lesieur [Chollet 1981], que nous utiliserons uniquement sur l'équation du fluide pour explorer la réponse d'un champ magnétique passif.

Les bases de ce travail étaient lancées. Mais ce travail fût finalement fini que trois années plus tard, avec le regard expérimenté d'Hélène Politano et aussi après avoir programmé le code MHD parallèle que j'appelle maintenant «cubby».

Simulation of Induction at Low Magnetic Prandtl Number

Yannick Ponty and Hélène Politano

CNRS, UMR 6202, Observatoire de la Côte d'Azur, BP 4229, Nice Cedex 4, France

Jean-François Pinton

CNRS, UMR 5672, Laboratoire de Physique,  cole Normale Supérieure, 46 allée d'Italie 69007 Lyon, France

(Received 26 November 2003; published 9 April 2004)

We consider the induction of a magnetic field in flows of an electrically conducting fluid at low magnetic Prandtl number and large kinetic Reynolds number. Using the separation between the magnetic and kinetic diffusive length scales, we propose a new numerical approach. The coupled magnetic and fluid equations are solved using a mixed scheme, where the magnetic field fluctuations are fully resolved and the velocity fluctuations at small scale are modeled using a large eddy simulation (LES) scheme. We study the response of a forced Taylor-Green flow to an externally applied field: topology of the mean induction and time fluctuations at fixed locations. The results are in remarkable agreement with existing experimental data; a global $1/f$ behavior at long times is also evidenced.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.144503

PACS numbers: 47.65.+a, 47.27.Eq, 91.25.Cw

One of the strongest motivations in the study of non-linear effects in magnetohydrodynamics is that electrically conductive flows are capable of dynamo action: the stretching of magnetic field lines by the flow velocity gradients can exceed the (Joule) diffusion. A bifurcation threshold occurs, above which the self-generation of a magnetic field takes place. It has been validated in constrained flows of liquid sodium, which mimic analytical models: the Karlsruhe [1] and Riga experiments [2]. The self-generation of a magnetic field in nonconstrained homogeneous flows is still an open problem actively studied by many groups [3]. In this research, numerical studies have long played an important role. Kinematic dynamo simulations assume a given pattern of a stationary velocity field and study the initial linear growth rate of magnetic field perturbations. They have been used extensively to test the dynamo capacity of flow geometries and proved to be successful at determining the dynamo threshold in the Karlsruhe and Riga experiments [4,5]. They have also shown that dynamo action is a possibility in unconstrained homogeneous flows of the von K arm an type [6,7]. Another numerical approach is to perform direct numerical simulations (DNS) of the full governing equations: the induction equation coupled with the fluid dynamical one by the Lorentz force, the flow being sustained by a given force (or equivalently an average geometry). They have confirmed that dynamo action is present in flows with differential rotations and helicity [8–10]. However, DNS are at present restricted to situations where the magnetic Prandtl number, $\text{Pr}_m = \nu/\lambda$ (where λ is the magnetic diffusivity) is of order 1, i.e., to situations where the smallest scales of the magnetic and velocity fields have the same characteristic size [11]. This is not the case in liquid metals, which have very small magnetic Prandtl number values, e.g., $\text{Pr}_m \sim 10^{-6}$ for liquid gallium and $\text{Pr}_m \sim 10^{-5}$ for liquid sodium.

Recall that below the dynamo threshold, a stationary forced flow with a power input ϵ (in watts per kg) has a viscous dissipative scale $\eta_u \sim (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$ and a Joule diffusive scale $\eta_B \sim (\lambda^3/\epsilon)^{1/4}$ —hence a ratio $\eta_u/\eta_B \sim \text{Pr}_m^{3/4}$. Therefore, at low Pr_m , the magnetic diffusive length scale is very much larger than the velocity dissipative scale. If nonlinear effects are to develop, the magnetic Reynolds number $\text{Re}_m \sim UL/\lambda$ (where U and L represent the characteristic velocity and scale of the flow) must be at least of order 1 and thus the kinetic Reynolds number of the flow, $\text{Re} \sim UL/\nu \sim \text{Re}_m/\text{Pr}_m$, must be very large (turbulence is fully developed). A DNS treatment of such a system is at present out of reach.

In this Letter, we present a new approach for the study of the magnetic induction in large Re —low Pr_m flows; we restrict ourselves to regimes below the dynamo threshold. In this parameter region, the magnetic field “lives” essentially within the large and inertial hydrodynamic scales. We thus propose to treat with a subgrid model the velocity scales which are smaller than the magnetic diffusive length. Schemes using hyperviscosity have previously been used [4,12]. Here, we prefer a large eddy simulation (LES) approach, which has proved very successful for the simulation of turbulent flows with large scale structures and for the modeling of energy transfers [13]. In this hybrid scheme, we solve the induction equation on a fully resolved grid and we use a LES method for the velocity field, with a cutoff scale at the end of the magnetic diffusive range. We consider the response of a conductive fluid to a uniform magnetic field: topology of the mean induced field and spatiotemporal features of the magnetic fluctuations are studied. The chosen flow is a forced Taylor-Green (TG) vortex. It shares many similarities with the experimental von K arm an swirling flows which have already been investigated in DNS near $\text{Pr}_m \sim \mathcal{O}(1)$ [9,10].

In nondimensional form, the incompressible MHD equations have two classical control parameters, the magnetic and kinetic Reynolds numbers, and one has to choose a forcing mechanism that generates the desired values of Re_m and Re . In order to be close to experimental procedures, we fix the driving force and magnetic Prandtl number. Hence, the dynamical time t_0 is set to the magnetic diffusion time scale, i.e., $t_0 \lambda / L^2 \sim \mathcal{O}(1)$, where L is a length scale characteristic of the system size. Changes in magnetic diffusivity for real fluids would change that time scale. We write the MHD equations, with constant unit density, as

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla P + Pr_m \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} + (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{B}, \quad (1)$$

$$\partial_t \mathbf{b} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \nabla^2 \mathbf{b}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (3)$$

where \mathbf{u} is the velocity field, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$ is the net magnetic field in the flow, sum of the applied field \mathbf{B}_0 , and induced field \mathbf{b} . Once the amplitude F of the driving force is fixed, the (nondimensional) rms intensity of the velocity fluctuations is $u_{\text{rms}} \sim \sqrt{F}$, the Reynolds number is $Re \sim \sqrt{F}/Pr_m$, and the magnetic Reynolds number is $Re_m \sim \sqrt{F}$. The interaction parameter which measures the ratio of Lorentz force to inertial forces is given by $N \simeq B_0^2/u_{\text{rms}} \sim B_0^2/\sqrt{F}$ and is usually small. The above expressions are only dimensional estimates; in practice, the characteristic flow quantities are computed as mean temporal values from the data; cf. Table I.

TABLE I. Time averaged quantities: $u_{\text{rms}} = \langle \mathbf{u}^2 \rangle^{1/2}$, $b_{\text{rms}} = \langle \mathbf{b}^2 \rangle^{1/2}$, flow integral scale $l_0 = 2\pi \sum_k E_v(k)/k / \sum_k E_v(k)$, Taylor microscale $l_T \sim l_0 Re_e^{-1/2}$, diffusive scale η_B , and eddy turnover time τ_{NL} . Nondimensional parameters: effective Prandtl number $Pr_{m,\text{eff}}$, kinetic Reynolds number $Re_e = l_0 u_{\text{rms}}/\nu_{\text{eff}}$ (see text), and magnetic Reynolds number $Re_m = Pr_{m,\text{eff}} Re_e$, Taylor-based Reynolds number $Re_{l_T} \sim Re_e^{1/2}$, interaction parameter $N = Re_m B_0^2/u_{\text{rms}}^2$.

Run	No. $\mathbf{B}_0 = 0.1 \hat{\mathbf{x}}$	No. $\mathbf{B}_0 = 0.1 \hat{\mathbf{z}}$
TG	Re = 9209	Re = 9212
$k_0 = 1$	$Re_m = 6.65$	$Re_m = 6.68$
$F = 3/2$	$Re_{l_T} = 95.94$	$Re_{l_T} = 95.96$
128^3 grid points	$Pr_{m,\text{eff}} \sim 7.22 \times 10^{-4}$	$Pr_{m,\text{eff}} = 7.26 \times 10^{-4}$
$K_c = k_{\text{max}} - 3$	$N = 8.23 \times 10^{-3}$	$N = 8.18 \times 10^{-3}$
$k_{\text{max}} = 64$	$l_0 = 2.338$	$l_0 = 2.337$
$t_{\text{max}} = 410$	$l_T = 0.024$	$l_T = 0.024$
	$\eta_B = 0.565$	$\eta_B = 0.563$
	$\tau_{NL} = 1.217$	$\tau_{NL} = 1.224$
	$u_{\text{rms}} = 2.843$	$u_{\text{rms}} = 2.858$
	$b_{\text{rms}} = 0.061$	$b_{\text{rms}} = 0.064$
	$\max \mathbf{u} = 8.211$	$\max \mathbf{u} = 8.249$
	$\max \mathbf{b} = 0.160$	$\max \mathbf{b} = 0.180$

We use a parallelized pseudospectral code in a $[0 - 2\pi]^3$ periodic box. Time stepping is done with an exponential forward Euler-Adams-Bashford scheme. The LES model is of the Chollet-Lesieur type [13] in which the kinematic viscosity ν is replaced in spectral space by an eddy viscosity. In Eq. (1) the magnetic Prandtl number is then replaced by

$$Pr_m(k, t) = 0.1[1 + 5(k/K_c)^8] \sqrt{E_v(k = K_c, t)/K_c}. \quad (4)$$

Here K_c is the cutoff wave number of the velocity field, and $E_v(k, t)$ is the one-dimensional kinetic energy spectrum. The effective Prandtl number $Pr_{m,\text{eff}}$ is obtained as the temporal mean of $Pr_m(0, t)$. Note that the effective fluid viscosity ν_{eff} is of the same magnitude. A consistency condition for our approach is that the magnetic field fluctuations are fully resolved when $2\pi/K_c$ is smaller than the magnetic diffusive scale $\eta_B \sim l_0/Re_m^{3/4}$, l_0 being the integral scale computed from the kinetic energy spectrum.

The flow is driven by the TG vortex geometry

$$\mathbf{F}_{\text{TG}}(k_0) = 2F \begin{bmatrix} \sin(k_0 x) \cos(k_0 y) \cos(k_0 z) \\ -\cos(k_0 x) \sin(k_0 y) \cos(k_0 z) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (5)$$

(k_0, k_0, k_0) is the wave vector that prescribes the velocity large scale (hereafter $k_0 = 1$). The \mathbf{F}_{TG} and \mathbf{B}_0 amplitudes are chosen such that the interaction parameter N remains smaller than 10^{-2} . After an initial transient ($t < 10$) the flow has reached a steady state: the kinetic energy fluctuates less than 3.5% around its mean value. All quantities are tracked up to $t_{\text{max}} = 410t_0$; note that $200t_0$ is of the order of the measurement time in most sodium experiments [14–16]. For comparison, the eddy turnover time $\tau_{NL} \sim l_0/u_{\text{rms}}$ is given in Table I

Figure 1 shows the power spectra of the velocity and magnetic field fluctuations with \mathbf{B}_0 applied along the $\hat{\mathbf{x}}$ axis (a direction perpendicular to the rotation axis of the counterrotating eddies of the TG cells). The kinetic energy spectrum exhibits a $k^{-5/3}$ Kolmogorov scaling maintained by the LES scheme. The peak at low wave

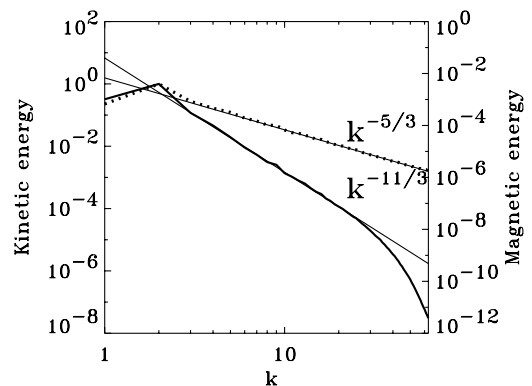


FIG. 1. Magnetic (solid line) and kinetic (dashed line) energy spectra computed at $t = 210$ for Run 1 with $\mathbf{B}_0 = 0.1 \hat{\mathbf{x}}$.

number, also visible on the magnetic field spectrum, is due the large scale TG forcing. The magnetic inertial range is well fitted by a $k^{-11/3}$ power law in agreement with a Kolmogorov phenomenology [17,18]. The magnetic diffusive scale is reached within the computational box. The main goal of our numerical strategy is thus achieved: the magnetic fluctuations are fully resolved in a range of scales at which the velocity field follows the Kolmogorov self-similar structure of turbulence. Hence, we get the possibility to study magnetic induction in a fully developed turbulent flow at low magnetic Prandtl number.

Figure 2 displays isosurfaces of the local induced magnetic energy $\langle E_b(\mathbf{x}, t) \rangle_T$ averaged in the time interval $T = [10 - 410]$, shown at 80% of its maximum value. For comparison, we also plot isosurfaces of the induced magnetic energy, $\langle E_{b,\text{lin}}(\mathbf{x}, t) \rangle_T$, obtained numerically from a linear approximation based on time averaged velocities: $\lambda \nabla^2 \mathbf{b} = -\mathbf{B}_0 \nabla \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \rangle_T$. This is similar to numerical studies based on averaged flow geometries [7,19]. When \mathbf{B}_0 is applied along $\hat{\mathbf{z}}$, in a direction parallel to the rotation axis of the TG eddies, the most intense magnetic energy structures are concentrated around the $z = \pi/2, 3\pi/2$

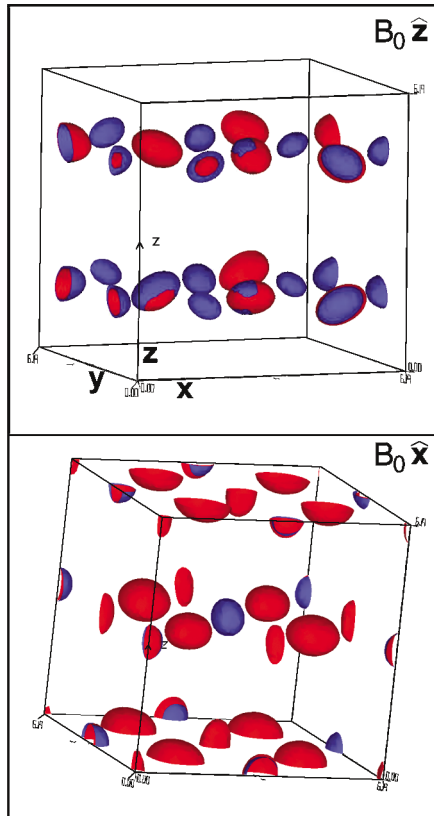


FIG. 2 (color). Topology of the local induced magnetic energy, averaged in time, when \mathbf{B}_0 is applied along the $\hat{\mathbf{z}}$ axis (top) and along the $\hat{\mathbf{x}}$ axis (bottom): in red, $\langle E_b(\mathbf{x}, t) \rangle_T$; in blue, $\langle E_{b,\text{lin}}(\mathbf{x}, t) \rangle_T$ (see text). The isosurfaces are plotted at 80% of the maximum values of the fields: $\max \langle E_b \rangle_T = 0.0056$ and $\max \langle E_{b,\text{lin}} \rangle_T = 0.0063$ for $\mathbf{B}_0 = 0.1\hat{\mathbf{z}}$, and $\max \langle E_b \rangle_T = 0.0041$ and $\max \langle E_{b,\text{lin}} \rangle_T = 0.0063$ for $\mathbf{B}_0 = 0.1\hat{\mathbf{x}}$.

planes, as a result of differential rotation in TG vortices. In this case, the most intense structures of $\langle E_b(\mathbf{x}, t) \rangle_T$ and $\langle E_{b,\text{lin}}(\mathbf{x}, t) \rangle_T$ coincide. For \mathbf{B}_0 along the $\hat{\mathbf{x}}$ axis, one observes a concentration of induction around $z = 0, \pi$ planes, as expected from a direct inspection from the flow forcing. Here, the most intense structures of $\langle E_b(\mathbf{x}, t) \rangle_T$ and $\langle E_{b,\text{lin}}(\mathbf{x}, t) \rangle_T$ do not coincide everywhere [see, for example, the location $(\pi/2, \pi/2, 0)$ in Fig. 2(bottom)]. Note that the linear calculation overestimates the time averaged magnetic fluctuations, whatever the orientation of the applied field. Altogether these observations show that one should be cautious when using average velocity fields in the calculation of magnetic induction, particularly if restricted to linear effects. The difference between the fields is probably linked to the large scale electromotive force due to turbulent motions. The influence of this force, as well as the large scale induction topology and its connection with the small scale fluctuations, will be reported in a forthcoming paper [20].

Figure 3 shows the time fluctuations of the induced field amplitude, $|\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)|$, probed inside the flow at two locations chosen from the previous topological observations, for \mathbf{B}_0 along the $\hat{\mathbf{x}}$ axis. This is equivalent to measurements with local probes as in laboratory experiments. The intensity of the induced magnetic field has strong local fluctuations. The point at $(0, \pi, 0)$ is in a region of strong mean induction, whereas the point at $(0.6\pi, 0.6\pi, 0.6\pi)$ is at location of low mean induction [cf. Fig. 2(bottom)]. We observe that occasionally the induced field gets larger than the applied field. In fact, if small amplitude fluctuations (about 10%) are induced over time intervals of the order of the diffusive time t_0 , much larger variations ($\sim 300\%$) can be observed over long time periods, of the order of $10t_0$. This is in excellent agreement with the experimental observations at comparable Re_m and Pr_m [14–16,18]. In order to be more quantitative, we analyze time spectra; we focus on the case with \mathbf{B}_0 applied along the $\hat{\mathbf{x}}$ axis, but the results are identical when \mathbf{B}_0 is along $\hat{\mathbf{z}}$. We plot in Fig. 4 the power spectra of time fluctuations of the magnetic field

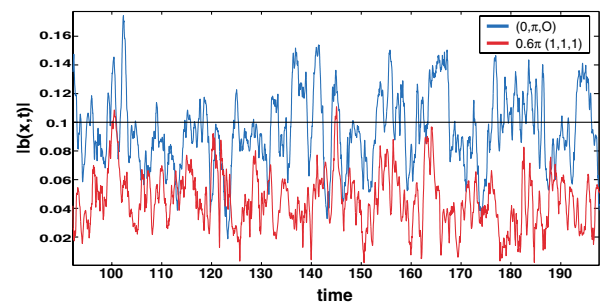


FIG. 3 (color). Time traces of $|\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)|$, for $\mathbf{B}_0 = 0.1\hat{\mathbf{x}}$, at two fixed points. Blue: $(0, \pi, 0)$, mean value $\langle |\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)| \rangle_T / B_0 = 0.92$, fluctuation level $|\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)|_{\text{rms}} / B_0 = 0.28$. Red: $(0.6\pi, 0.6\pi, 0.6\pi)$, mean value $\langle |\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)| \rangle_T / B_0 = 0.44$, fluctuation level $|\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)|_{\text{rms}} / B_0 = 0.19$.

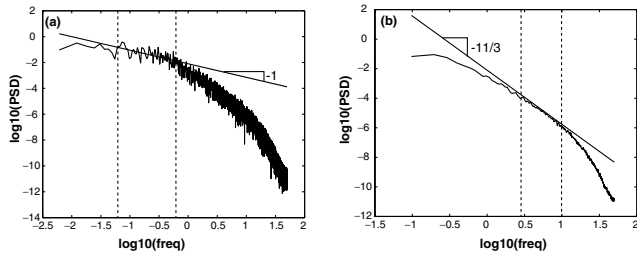


FIG. 4. Power spectral density of the magnetic field fluctuations of $b_x(\mathbf{x}, t)$ in time, recorded at space location $(0, \pi, 0)$, when $\mathbf{B}_0 = 0.1\hat{\mathbf{x}}$. (a) PSD computed as averages over Fourier transforms calculated over long time intervals ($164t_0$) to emphasize the low frequency behavior. (b) PSD estimated from Fourier transforms over shorter time intervals ($10t_0$). The behavior is identical for the $b_y(\mathbf{x}, t)$ and $b_x(\mathbf{x}, t)$ field components.

component $b_x(\mathbf{x}, t)$ recorded at $(0, \pi, 0)$. The higher end of the time spectrum follows a $f^{-11/3}$ behavior, as can be expected from the spatial spectrum using the Taylor hypothesis of “frozen” field lines advected by the mean flow [18]. For frequencies roughly between $1/t_0$ and $1/10t_0$, the time spectrum develops a $1/f$ behavior, as observed in experimental measurements [15]. Here also, this regime develops for frequencies that are smaller than the one, $1/t_0 \sim 1/\tau_{NL}$, associated with the large scale eddy turnover time (flow forcing). It is not present in the spatial spectrum in Fig. 1, and thus appears as a distinctive feature of the *time dynamics* of the induced field. It is also independent of dynamo action, as has been also observed in the Karlsruhe [16] and Riga [21] experiments. Finally, our numerical study reveals one remarkable feature: the $1/f$ behavior is a global feature. It is observed on the fluctuations of the magnetic energy, as shown in Fig. 5 (as a f^{-2} scaling regime). We thus propose that it results from induction processes which have contributions up to the largest scales in the system. However, the origin of this behavior is not fully understood; it is at present an open problem.

To summarize, the mixed numerical scheme proposed here proves to be a valuable tool for the study of magnetohydrodynamics at low magnetic Prandtl numbers. We have considered here the response to an externally applied field. The time behavior of magnetic field fluctuations is found to be in excellent agreement with experimental measurements. It has also revealed that the $1/f$ regime detected locally traces back to the global dynamics of the flow. Future work will analyze the contribution of turbulent fluctuations to the large scale magnetic field dynamics. We also plan to use this technique to address the question of the variation of the critical magnetic Reynolds number with the magnetic Prandtl number (see, for instance, Marié *et al.* in [3]) or, in a related manner, the existence of a critical magnetic Prandtl number as the kinetic Reynolds number of the flow grows to infinity [11].

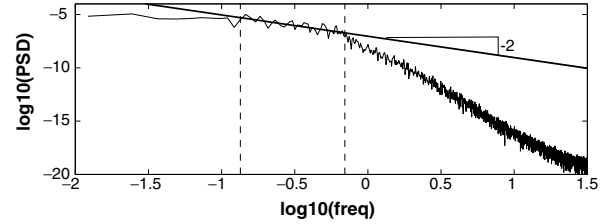


FIG. 5. Power spectral density of the time fluctuations of the magnetic energy $E_b(t) = \langle \mathbf{b}^2(t) \rangle / 2$, integrated over space.

We thank J.-P. Bertoglio, P. Odier, and A. Pouquet for fruitful discussions. This work is supported by CNRS ATIP/SPI, PCMI and GdR-Dynamo. Computations performed on an Alineos PC cluster (OCA) and at IDRIS.

- [1] R. Stieglitz and U. Müller, *Phys. Fluids* **13**, 561 (2001).
- [2] A. Gailitis *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3024 (2001).
- [3] Special issue on MHD dynamo experiments, *Magnetohydrodynamics* **38** (2002).
- [4] R. Kaiser and A. Tilgner, *Phys. Rev. E* **60**, 2949 (1999).
- [5] A. Gailitis, O. Lielausis, E. Platācis, G. Gerbeth, and F. Stefani, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 973 (2002).
- [6] N. L. Dudley and R. W. James, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **452**, 407 (1989).
- [7] L. Marié, J. Burguete, F. Daviaud, and J. Léorat, *Eur. Phys. J. B* **33**, 469 (2003).
- [8] M. Meneguzzi, U. Frisch, and A. Pouquet, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1060 (1981).
- [9] C. Nore, M. Brachet, H. Politano, and A. Pouquet, *Phys. Plasmas* **4**, 1 (1997).
- [10] C. Nore, M.-E. Brachet, H. Politano, and A. Pouquet, *Dynamo Action in a Forced Taylor-Green Vortex*, in *Dynamo and Dynamics, a Mathematical Challenge: NATO Science Series II*, edited by P. Chossat, D. Armbruster, and I. Oprea (Kluwer Academic, Dordrecht, 2001), Vol. 26, pp. 51-58.
- [11] A. A. Schekochihin *et al.*, *astro-ph/0308336*.
- [12] G. A. Glatzmaier and P. H. Roberts, *Nature (London)* **377**, 203 (1995).
- [13] J.-P. Chollet and M. Lesieur, *J. Atmos. Sci.* **38**, 2747 (1981).
- [14] N. L. Peffley, A. B. Cawthorne, and D. P. Lathrop, *Phys. Rev. E* **61**, 5287 (2000).
- [15] M. Bourgoin *et al.* *Phys. Fluids* **14**, 3046 (2001).
- [16] R. Stieglitz and U. Müller, “*The Karlsruhe Dynamo Experiment*,” *Wissenschaftliche Berichte, FZKA Report No. 6756*, 2002.
- [17] H. K. Moffatt, *J. Fluid Mech.* **11**, 625 (1961).
- [18] P. Odier, J.-F. Pinton, and S. Fauve, *Phys. Rev. E* **58**, 7397 (1998).
- [19] M. Bourgoin, P. Odier, J.-F. Pinton, and Y. Ricard, *Phys. Fluids* (to be published).
- [20] Y. Ponty *et al.*, “*Turbulent Fluctuations and Large Scale Magnetic Fields*” (to be published).
- [21] A. Gailitis *et al.*, *Phys. Plasmas* **11**, 1 (2004).

B.2 Dynamo et Seuil

B.2.1 Notes personnelles

Cette publication était la continuité logique de la précédente [Ponty 2004]. C'est à dire l'évaluation du seuil de la dynamo, sans aucun champ magnétique extérieur appliqué. Jean-François Pinton était invité par Annick Pouquet pour une année à Boulder et ce projet est naturellement devenue une priorité commune. J'ai rencontré un brillant post-doc Pablo Minnini. Nous nous sommes retrouvés avec deux codes pseudo-spectraux et deux méthodes de modélisation sous maille très différents. Ce travail a été passionnant, car il y avait une réelle émulation et l'addition de notre travail d'équipe et de nos compétences a produit de très bons résultats. Cette collaboration a continué sur plusieurs articles. Ces travaux m'ont permit notamment de re-travailler avec Annick Pouquet.

Cet article montre que le seuil de la dynamo peut ne plus dépendre du niveau de la turbulence et atteindre un palier dans la limite à fort Reynolds cinétique ou dans la limite à faible nombre de Prandtl magnétique. En 2004 et 2005, cette idée n'était pas communément acquise. Des travaux théoriques ou numériques prétendaient même le contraire. Mais à la différence des travaux du moment, notre forçage produit un écoulement avec champ moyen qui favorise la mise en évidence de ce palier (voir l'article suivant). L'équipe a dû batailler avec les referees pour faire admettre ces résultats.

Numerical Study of Dynamo Action at Low Magnetic Prandtl Numbers

Y. Ponty,¹ P.D. Mininni,² D.C. Montgomery,³ J.-F. Pinton,⁴ H. Politano,¹ and A. Pouquet²

¹CNRS UMR6202, Laboratoire Cassiopée, Observatoire de la Côte d'Azur, BP 4229, Nice Cedex 04, France

²ASP/NCAR, P.O. Box 3000, Boulder, Colorado 80307-3000, USA

³Department of Physics and Astronomy, Dartmouth College, Hanover, New Hampshire 03755, USA

⁴CNRS UMR5672, Laboratoire de Physique, École Normale Supérieure de Lyon, 46 Allée d'Italie, 69007 Lyon, France

(Received 7 October 2004; published 27 April 2005)

We present a three-pronged numerical approach to the dynamo problem at low magnetic Prandtl numbers P_M . The difficulty of resolving a large range of scales is circumvented by combining direct numerical simulations, a Lagrangian-averaged model and large-eddy simulations. The flow is generated by the Taylor-Green forcing; it combines a well defined structure at large scales and turbulent fluctuations at small scales. Our main findings are (i) dynamos are observed from $P_M = 1$ down to $P_M = 10^{-2}$, (ii) the critical magnetic Reynolds number increases sharply with P_M^{-1} as turbulence sets in and then it saturates, and (iii) in the linear growth phase, unstable magnetic modes move to smaller scales as P_M is decreased. Then the dynamo grows at large scales and modifies the turbulent velocity fluctuations.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.164502

PACS numbers: 47.27.Eq, 47.65.+a, 91.25.Cw

The generation of magnetic fields in celestial bodies occurs in media for which the viscosity ν and the magnetic diffusivity η are vastly different. For example, in the interstellar medium the magnetic Prandtl number $P_M = \nu/\eta$ has been estimated to be as large as 10^{14} , whereas in stars such as the Sun and for planets such as the Earth, it can be very low ($P_M < 10^{-5}$, the value for the Earth's iron core). Similarly in liquid breeder reactors and in laboratory experiments in liquid metals, $P_M \ll 1$. At the same time, the Reynolds number $R_V = UL/\nu$ (U is the rms velocity; L is the integral scale of the flow) is very large, and the flow is highly complex and turbulent, with prevailing nonlinear effects rendering the problem difficult to address. The dynamo instability is governed by the magnetohydrodynamics (MHD) equations,

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla \mathcal{P} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{F}, \quad (1)$$

$$\partial_t \mathbf{B} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v} + \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (2)$$

together with $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, and assuming a constant mass density. Here, \mathbf{v} is the velocity field, and \mathbf{B} is the magnetic field. \mathcal{P} is the pressure and $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$ is the current density. \mathbf{F} is a forcing term, responsible for the generation of the flow (buoyancy and Coriolis in planets and mechanical drive in experiments).

Several mechanisms have been studied for dynamo action, both analytically and numerically, involving, in particular, the role of helicity [1] (i.e., the correlation between velocity and its curl, the vorticity) for dynamo growth at scales larger than that of the velocity, and the role of chaotic fields for small-scale growth of magnetic excitation (for a recent review, see [2]). If the stretching and folding of magnetic field lines by velocity gradients overcome dissipation, dynamo action takes place above a critical magnetic Reynolds number R_M^c , with $R_M = P_M R_V = UL/\eta$. Dynamo experiments based on constrained helical

flows of liquid sodium have been successful [3]. However, these experimental setups do not allow for a complete investigation of the dynamical regime, and many groups have searched to implement unconstrained dynamos [4]. Two difficulties arise: first, turbulence now becomes fully developed with velocity fluctuations reaching up to 40% of the mean; second, it is difficult to produce flows in which the helicity is more or less uniformly distributed spatially at the small scales, so that it is difficult to assess the effect of helical turbulent inverse cascades on the dynamo. Recent direct numerical simulations (DNS) address the case of randomly forced, nonhelical flows with magnetic Prandtl numbers from 1 to 0.1. The results obtained are not unambiguous: it is shown in [5] that dynamo action can be inhibited for $P_M < 1/4$, while it is observed in [2] that the dynamo threshold increases as $P_M^{-1/2}$ down to $P_M \sim 0.3$. Experiments made in von Kármán geometries (either spherical or cylindrical) have reached R_M values up to 60 [6]. Also, MHD turbulence at low P_M has been studied in the idealized context of turbulent closures [7]. In this context, turbulent dynamos are found, and the dependences of R_M^c upon three quantities are studied, namely, P_M , the relative rate of helicity injection, and the forcing scale. An increase of $\sim 20\%$ in R_M^c is observed as P_M decreases from 1 to $\sim 3 \times 10^{-5}$. Recently, the Kazantsev-Kraichnan [8] model of δ -correlated velocity fluctuations has been used to study the effect of turbulence. It has been shown that the threshold increases with the rugosity of the flow field [9].

There is therefore a strong motivation to study how the dynamo threshold varies as P_M is progressively decreased, for a given flow. In this Letter we focus on a situation where the flow forcing is not random but generates a well defined geometry at large scales, with turbulence developing naturally at small scales as the R_V increases. This situation complements recent investigations [2,5,9] and is quite relevant for planetary and laboratory flows.

Specifically, we consider the swirling flow resulting from the Taylor-Green (TG) forcing [10]:

$$\mathbf{F}_{\text{TG}}(k_0) = 2F \begin{bmatrix} \sin(k_0x) \cos(k_0y) \cos(k_0z) \\ -\cos(k_0x) \sin(k_0y) \cos(k_0z) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

This force generates flow cells that have locally differential rotation and helicity, two key ingredients for dynamo action [1,2]. In our numerical resolutions, we have chosen not to impose on the flow field the symmetries of the Taylor-Green forcing [11] and to set $k_0 = 2$ so that dynamo action is free to develop at scales larger or smaller than the forcing scale $k_f = k_0\sqrt{3}$. The flow generated by the TG force has motivated several numerical studies in the regime $P_M \sim 1$ [11,12]; it also shares similarities, particularly at large Reynolds numbers, with the Maryland, Cadarache, and Wisconsin sodium experiments [4]. Its global integrated helicity is zero over the whole domain. However local fluctuations of helicity are always present in the flow—here, we mean that the probability density function of kinetic helicity is centered about zero but has wings (growing with R_V); but even in one TG cell the net helicity (integrated over space) is zero.

Our numerical study begins with DNS in a 3D periodic domain. The code uses a pseudospectral algorithm, an explicit second order Runge-Kutta advance in time, and a classical dealiasing rule—the last resolved wave number is $k = N/3$ where N is the number of grid points per dimension. Resolutions from 64^3 to 512^3 grid points are used, to cover P_M from 1 to 1/5. However, DNS are limited in the Reynolds numbers and the (lowest) P_M they can reach. We then use a second method, the LAMHD (or α) model, in which we integrate the Lagrangian-averaged MHD equations [13,14]. This formulation leads to a drastic reduction in the degrees of freedom at small scales by the introduction of smoothing lengths α_V and α_M . The fields are written as the sum of filtered (smoothed) and fluctuating components: $\mathbf{v} = \mathbf{u}_s + \delta\mathbf{v}$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_s + \delta\mathbf{B}$, with $\mathbf{u}_s = G_{\alpha_V} \otimes \mathbf{v}$, $\mathbf{B}_s = G_{\alpha_M} \otimes \mathbf{B}$, where “ \otimes ” stands for convolution and G_α is the smoothing kernel at scale α , $G_\alpha(\mathbf{r}, t) = \exp[-r/\alpha]/4\pi\alpha^2r$. Inversely, the rough fields can be written in terms of their filtered counterparts as $\mathbf{v} = (1 - \alpha_V^2\nabla^2)\mathbf{u}_s$ and $\mathbf{B} = (1 - \alpha_M^2\nabla^2)\mathbf{B}_s$. In the resulting equations, the velocity and magnetic field are smoothed, but not the fields’ sources, i.e., the vorticity and the current density [15]. This model has been checked in the fluid case against experiments and DNS of the Navier-Stokes equations [16], as well as in MHD [14]. Finally, in order to reach still lower P_M , we implement a large-eddy simulation (LES) model. LESs are commonly used and well tested in fluid dynamics against laboratory experiments and DNS in a variety of flow configurations [17], but their extension to MHD is still in its infancy (see, however, [18]). We use a scheme as introduced in [19], aimed at integrating the primitive MHD equations with a turbulent

velocity field all the way down to the magnetic diffusion with no modeling in the induction equation but with the help of a dynamical eddy viscosity [20]:

$$\nu(k, t) = 0.27[1 + 3.58(k/K_c)^8]\sqrt{E_V(K_c, t)/K_c}; \quad (4)$$

K_c is the cutoff wave number of the velocity field, and $E_V(k, t)$ is the one-dimensional kinetic energy spectrum. A consistency condition for our approach is that the magnetic field fluctuations be fully resolved when $2\pi/K_c$ is smaller than the magnetic diffusive scale $\ell_\eta \sim L/R_M^{3/4}$.

The numerical methods, parameters of the runs, and associated characteristic quantities are given in Table I. In all cases, we first perform a hydrodynamic run, lasting about 10 turnover times, to obtain a statistically steady flow. Then we add a seed magnetic field and monitor the growth of the magnetic energy E_M for a time that depends on the run resolution; it is of the order of 1 magnetic diffusion time $\tau_\eta = (2\pi)^2/\eta$ at 64^3 , but it drops down to $\tau_\eta/5$ at 512^3 . We define the magnetic energy growth rate as $\sigma = d \log E_M / dt$, computed in the linear regime (t is in units of large scale turnover time). The dynamo threshold corresponds to $\sigma = 0$. For each configuration (Table I), we make several MHD simulations with different P_M , varying η , and for a fixed R_V defined by the hydrodynamic run. We

TABLE I. Run parameters: code used, linear grid resolution N , Reynolds number R_V , integral length scale L (defined as $L = 2\pi \int k^{-1} E_V(k) dk / \int E_V(k) dk$), critical magnetic Reynolds number R_M^c , inverse magnetic Prandtl number $1/P_M^c$, wave number k_{\max} with the largest magnetic energy density, characteristic wave number k_D of magnetic field gradients (defined as the maximum of the current density spectrum), and kinetic spectral index ρ in the range $[k_{\max}, k_D]$ (computed as a linear estimate). The values of ρ , L , and U used in the definitions of the Reynolds and magnetic Prandtl numbers are computed as time averages during the steady state of the hydrodynamic simulation; k_{\max} and k_D are computed as time averages during the linear regime of the dynamo simulation closest to R_M^c .

code	N	R_V	L	R_M^c	$1/P_M^c$	k_{\max}	k_D	ρ
DNS	64	30.5	2.15	28.8	1.06	2	5	...
DNS	64	40.5	2.02	31.7	1.28	2	5	...
DNS	64	128	1.9	62.5	2.05	4	9	...
DNS	128	275	1.63	107.9	2.55	5	11	-2.15
DNS	256	675	1.35	226.4	2.98	7	21	$\sim -5/3$
DNS	512	874.3	1.31	192.6	4.54	9	26	$\sim -5/3$
LAMHD	64	280	1.68	117.3	2.38	6	11	...
LAMHD	128	678.3	1.35	256.6	2.64	8	12	$\sim -5/3$
LAMHD	128	880.6	1.32	242.1	3.64	9	22	$\sim -5/3$
LAMHD	256	1301.1	1.3	249.3	5.22	9	31	$\sim -5/3$
LAMHD	512	3052.3	1.22	276.4	11.05	10	45	$\sim -5/3$
LES	128	2236.3	1.37	151.9	14.72	5	21	-5/3
LES	256	5439.2	1.39	141	38.57	5	31	-5/3
LES	512	13395	1.34	144.4	96.92	5	45	-5/3

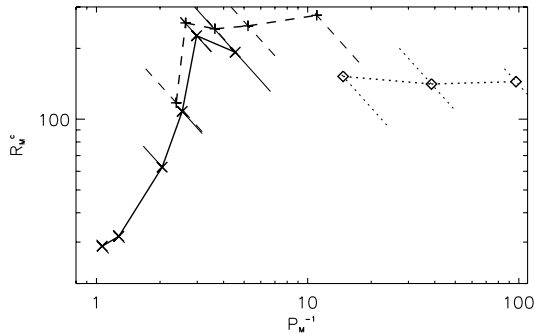


FIG. 1. R_M^c for dynamo action versus inverse P_M . Symbols are \times (DNS), $+$ (LAMHD), and \diamond (LES). Transverse lines indicate error bars in the determination of R_M^c , as the distance between growing and decaying runs at a constant R_V .

bound the marginal growth between clearly decaying and growing evolutions of the magnetic energy.

At $P_M = 1$, the dynamo self-generates at $R_M^c = 30$. As P_M is lowered, we observe in the DNS that the threshold reaches $R_M^c = 70$ at $P_M = 0.5$ and then increases steeply to $R_M^c = 226$ at $P_M = 0.3$; at lower P_M it does not increase anymore, but drops slightly to a value of 200 at $P_M = 0.2$ (Fig. 1 and Table I). We then continue with LAMHD simulations to reach lower P_M . To ensure the consistency of the method, we have run overlapping DNS and LAMHD simulations in the range $P_M = 0.4$ – 0.2 . We have reached a good matching of the growth or decay rates [for identical (P_M, R_M) parameters] when using filtering scales related by $\alpha_V/\alpha_M = P_M^{3/4}$ (note that it preserves the dimensional relationship between magnetic and kinetic dissipation scales [14]). Our observation with the LAMHD computations is that the steep increase in R_M^c to a value over 250 is being followed by a plateau for P_M values down to 0.09. We do note a small but systematic trend of the LAMHD simulations to overestimate the threshold compared to DNS. We attribute it to the increased turbulent intermittency generated by the α model, but further investigations are required to describe fully this effect. As turbulence becomes fully developed, LES modeling becomes justified [17,19] and allows us to further our investigation; with this model we observe that the threshold for dynamo self-generation remains constant, of the order of $R_M^c \sim 150$, for P_M between 10^{-1} and 10^{-2} .

In regards to the generation of dynamo action in the Taylor-Green geometry we thus find (i) at all P_M investigated a dynamo threshold exists, (ii) as P_M drops below 0.2–0.3, the critical R_M^c levels and remains of the order of 200, and (iii) the steep initial increase in R_M^c is identified with the development of an inertial range in the spectra of kinetic energy; as the kinetic energy spectrum grows progressively into a Kolmogorov $k^{-5/3}$ spectrum, R_M^c ceases to have significant changes—cf. Table I.

We plot in Fig. 2 the magnetic energy spectra $E_M(k)$ during the linear growth phase, at identical instants when

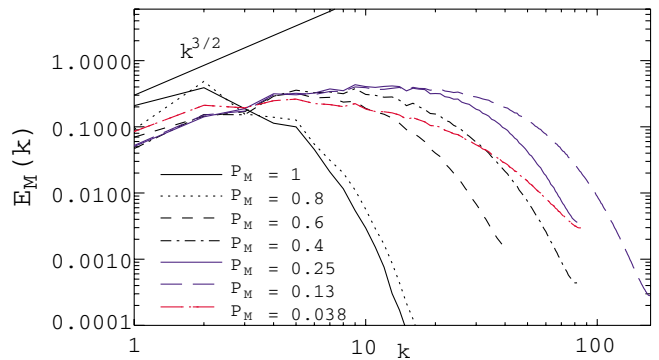


FIG. 2 (color). Magnetic spectra for $P_M = 1$ to $P_M = 0.4$ (DNS), $P_M = 0.25, 0.13$ (LAMHD), $P_M = 0.038$ (LES), at a time within the linear growth of magnetic energy; ($P_M = 1$, $R_V = 30.5$), ($P_M = 0.8$, $R_V = 40.5$), ($P_M = 0.6$, $R_V = 275$), ($P_M = 0.4$, $R_V = 675$), ($P_M = 0.25$, $R_V = 1301$), ($P_M = 0.13$, $R_V = 3052$), ($P_M = 0.038$, $R_V = 5439$); magnetic Reynolds number set 10% above threshold.

normalized by the growth rate. Four features are noteworthy: first, the dynamo grows from a broad range of modes; second, the maximum of $E_M(k)$ moves progressively to smaller scales as P_M decreases, a result already found numerically in [2]; third, a self-similar magnetic spectrum, $E_M(k) \sim k^{3/2}$, develops at the beginning during the linear growth phase—in a similar fashion as to Kazantsev [8] and as found in other numerical simulations of dynamo generation by turbulent fluctuations [2,5]. This feature persists when the flow has a well defined mean geometry in addition to turbulence. Last, we observe that the initial magnetic growth at small scales is always followed by a second phase where the magnetic field grows in the (large) scales of the Taylor-Green flow. Figure 3 shows renderings of the magnetic energy and compare low and high Reynolds number cases. When the dynamo is generated at low Reynolds number ($R_V \sim 30$ and $P_M = 1$), the magnetic field is smooth. As P_M decreases and the dynamo grows from a turbulent field, one first observes a complex magnetic field pattern—for $t < 40$, in the example shown in Fig. 3 (center). But as nonlinear effects develop (here for

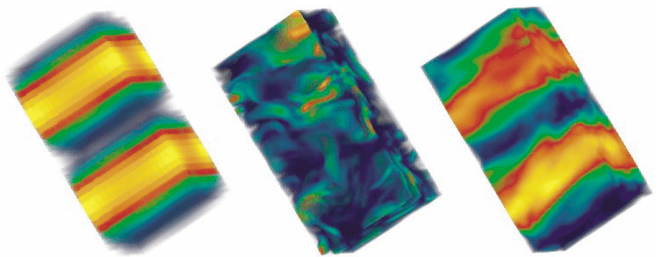


FIG. 3 (color). Spatial distributions of the magnetic energy for two Taylor-Green cells (DNS): $P_M = 1$, $R_V \sim 30$ at $t = 20$ (left), $P_M = 0.4$, $R_V = 675$ at $t = 20$ (center), and $t = 150$ (right).

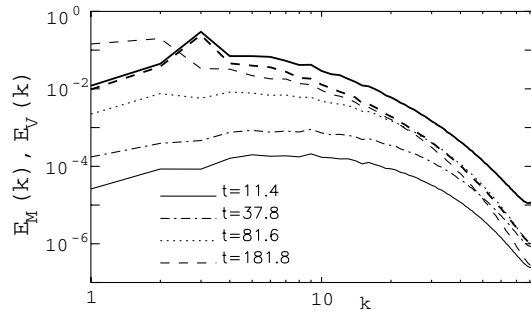


FIG. 4. Magnetic (thin line) and kinetic (thick line) spectra as a function of time at $P_M = 0.4$ (DNS).

times $t > 40$) a large scale mode ($k = 2$) dominates the growth with a structure that is similar to the one at low R_V . The initial growth of small-scale magnetic fields and the subsequent transfer to a large scale dynamo mode is also clearly visible on the development in time of the magnetic and kinetic energies, in a high R_V case, as shown in Fig. 4. During the linear growth, modes increase in a self-similar fashion, accounting for the complexity of the dynamo field—cf. Fig. 3 (center). At a later time, the large scale field grows and the kinetic energy spectrum $E_V(k)$ is progressively modified at inertial scales. The spectral slope changes from a scaling close to Kolmogorov $k^{-5/3}$ to a steeper decrease, compatible with the k^{-3} law observed experimentally [21]. The effect is to modify the turbulent scales and to favor the dynamo mode that is allowed by the large scale flow geometry. This is consistent with the experimental observation of a k^{-5} magnetic spectrum in the Karlsruhe dynamo experiment [22]. It also corroborates the claim [23] that the saturation of the turbulent dynamo starts with the backreaction of the Lorentz force on the turbulent fluctuations; the mean flow is altered at a later stage as shown in [14] where we describe the complete saturation stage.

To conclude, we have implemented a combination of DNS, LAMHD modeling, and LES. We show that for the Taylor-Green flow forcing there is a strong increase in the critical magnetic Reynolds number for dynamo action when P_M is decreased, directly linked to the development of turbulence; it is followed by a plateau on a large range of P_M from ~ 0.25 to $\sim 10^{-2}$. Thus, in a situation with both a mean flow and turbulent fluctuations, we find that the selection of the dynamo mode results from a subtle interaction between the large and small scales. Further discussions of the numerical procedure and results will be reported elsewhere [14].

We thank D. Holm for discussions about the α model and H. Tufo for providing computer time at UC-Boulder, NSFARI Grant No. CDA-9601817. NSF Grants No. ATM-0327533 (Dartmouth) and No. CMG-0327888 (NCAR) are acknowledged. J.F.P., H.P., and Y.P. thank CNRS Dynamo GdR, INSU/PNST, and PCMI Programs for support. Computer time was provided by NCAR, PSC, UC,

NERSC, and IDRIS (CNRS).

- [1] H. K. Moffatt, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids* (Cambridge University Press, Cambridge, 1978).
- [2] N. E. L. Haugen, A. Brandenburg, and W. Dobler, *Phys. Rev. E* **70**, 016308 (2004); A. Brandenburg and K. Subramanian, *Phys. Rep.* (to be published).
- [3] A. Gailitis, *Magnetohydrodynamics* **1**, 63 (1996); A. Tilgner, *Phys. Rev. A* **226**, 75 (1997); R. Steglitz and U. Müller, *Phys. Fluids* **13**, 561 (2001); A. Gailitis *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4365 (2000).
- [4] See the special issue on MHD dynamo experiments [*Magnetohydrodynamics* **38** (2002)].
- [5] A. Schekochihin *et al.*, *New J. Phys.* **4**, 84 (2002); A. Schekochihin *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 054502 (2004).
- [6] N. L. Peffley, A. B. Cawthorne, and D. P. Lathrop, *Phys. Rev. E* **61**, 5287 (2000); M. Bourgoin *et al.*, *Phys. Fluids* **14**, 3046 (2002).
- [7] R. H. Kraichnan and S. Nagarajan, *Phys. Fluids* **10**, 859 (1967); J. Léorat, A. Pouquet, and U. Frisch, *J. Fluid Mech.* **104**, 419 (1981).
- [8] A. P. Kazantsev, *Sov. Phys. JETP* **26**, 1031 (1968); R. H. Kraichnan, *Phys. Fluids* **11**, 945 (1968).
- [9] I. Rogachevskii and N. Kleeorin, *Phys. Rev. E* **56**, 417 (1997); S. Boldyrev and F. Cattaneo, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 144501 (2004); D. Vincenzi, *J. Stat. Phys.* **106**, 1073 (2002).
- [10] M. Brachet, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. IV* **311**, 775 (1990).
- [11] N. L. Dudley and R. W. James, *Proc. R. Soc. London A* **425**, 407 (1989); C. Nore *et al.*, *Phys. Plasmas* **4**, 1 (1997).
- [12] L. Marié *et al.*, *Eur. Phys. J. B* **33**, 469 (2003); M. Bourgoin *et al.*, *Phys. Fluids* **16**, 2529 (2004).
- [13] D. D. Holm, *Physica (Amsterdam)* **170D**, 253 (2002).
- [14] P. D. Mininni, D. C. Montgomery, and A. Pouquet, *Phys. Fluids* **17**, 035112 (2005); *Phys. Rev. E* (to be published); P. D. Mininni *et al.*, astro-ph/0412071 [*Astrophys. J.* (to be published)].
- [15] D. C. Montgomery and A. Pouquet, *Phys. Fluids* **14**, 3365 (2002).
- [16] S. Y. Chen *et al.*, *Phys. Fluids* **11**, 2343 (1999); S. Y. Chen *et al.*, *Physica (Amsterdam)* **133D**, 66 (1999).
- [17] C. Meneveau and J. Katz, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **32**, 1 (2000).
- [18] A. Pouquet, J. Léorat, and U. Frisch, *J. Fluid Mech.* **77**, 321 (1976); A. Yoshizawa, *Phys. Fluids* **30**, 1089 (1987); M. Theobald, P. Fox, and S. Sofia, *Phys. Plasmas* **1**, 3016 (1994); W.-C. Müller and D. Carati, *Phys. Plasmas* **9**, 824 (2002); B. Knaepen and P. Moin, *Phys. Fluids* **16**, 1255 (2004).
- [19] Y. Ponty, H. Politano, and J. F. Pinton, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 144503 (2004).
- [20] J. P. Chollet and M. Lesieur, *J. Atmos. Sci.* **38**, 2747 (1981).
- [21] A. Alemany *et al.*, *J. Mec.* **18**, 277 (1979).
- [22] U. Müller, R. Steglitz, and S. Horanyi, *J. Fluid Mech.* **498**, 31 (2004).
- [23] F. Pétrélis and S. Fauve, *Eur. Phys. J. B* **22**, 273 (2001).

B.3 Seuil et champ moyen

B.3.1 Notes personnelles

Ce travail est aussi dans la continuité de la PRL [Ponty 2005], il a été réalisé avec la même équipe. La science est commenté dans le Chap. 3. Nous avons eu des problèmes pour publier ces résultats dans Phys. Rev. Lett. Fait d'avoir montré aux rapporteurs de Phys. Rev. Lett. que les simulations numériques étaient très largement résolues, et le fait d'avoir un plateau à faible nombre de Prandtl magnétique est dû à la présence du champ moyen. Peine perdu, certain théoriciens ayant montré des résultats dans un cadre très restreint, ont eu apparemment du mal à accepter que leur théorie ne colle pas à toutes les sauces. Nous nous sommes tourné vers New Journal of Physics, et maintenant l'article est très largement cité.

Dynamo action at low magnetic Prandtl numbers: mean flow versus fully turbulent motions

Y Ponty¹, P D Mininni², J-F Pinton³, H Politano¹ and A Pouquet²

¹ CNRS UMR6202, Laboratoire Cassiopée, Observatoire de la Côte d'Azur, BP 4229, Nice Cedex 04, France

² NCAR, P O Box 3000, Boulder Colorado 80307-3000, USA

³ CNRS UMR5672, Laboratoire de Physique, École Normale Supérieure de Lyon, 46 Allée d'Italie, 69007 Lyon, France

E-mail: Yannick.PONTY@obs-nice.fr

New Journal of Physics **9** (2007) 296

Received 17 January 2007

Published 31 August 2007

Online at <http://www.njp.org/>

doi:10.1088/1367-2630/9/8/296

Abstract. We compute numerically the threshold for dynamo action in Taylor–Green (TG) swirling flows. Kinematic dynamo calculations, for which the flow field is fixed to its time average, are compared to dynamical runs, with the Navier–Stokes and induction equations jointly solved. The dynamo instability for the kinematic calculations is found to have two branches. The dynamical dynamo threshold at low Reynolds numbers lies within the low branch, while at high Reynolds numbers it gets closer to the high branch. Based on these results, the effect of the mean flow and of the turbulent fluctuations in TG dynamos are discussed.

Contents

1. Introduction	2
2. Dynamical runs	3
3. Kinematic runs	4
4. Results	5
5. Discussion	9
Acknowledgments	10
References	10

1. Introduction

The magnetic field of planets and stars is believed to be the result of a dynamo instability originating in the motions inside their electrically conducting fluid core. A dynamo occurs when induction due to motion overcomes diffusion [1], corresponding to a threshold in the magnetic Reynolds number ($R_M = UL/\eta$, with U and L characteristic velocity and length scales of the flow, and η the magnetic diffusivity). For liquid metals (such as molten iron in the Earth core, or liquid sodium in laboratory experiments [2]), the kinematic viscosity $\nu \ll \eta$, and the magnetic Prandtl number $P_M = \nu/\eta$ is $\sim 10^{-5}$ or lower. Thus, the Reynolds number $R_V = UL/\nu = R_M/P_M$ of dynamo generating flows tends to be very high: critical values R_M^c of the order of a few tens are associated with Reynolds numbers in excess of one million.

Here, following the practice in laboratory experiments (and also in several astrophysical and geophysical flows), we focus on flows generated by a deterministic forcing at large-scales. For these, a mean flow develops in addition to turbulent fluctuations which (as observations show) are present in all spatial and temporal scales with correlation length and times extending to the integral scale. In a previous work [3] we considered the flow generated by Taylor–Green (TG) forcing at large-scales. Lowering P_M to 10^{-2} , we established that the value of the threshold for dynamo action R_M^c , of the order of 20 for the laminar flow at low R_V , undergoes an eightfold increase as unsteadiness and small-scale motions develop. It was also observed that once turbulence is fully established, R_M^c saturates to a constant value. For planetary bodies or laboratory experiments, the numerical prediction of the dynamo threshold in realistic conditions is still out of reach. Nonetheless, the experiments [4] in Riga and Karlsruhe found the onset to be remarkably close to the values predicted from kinematic dynamo simulations based on the mean flow structure [5]. However, the flows in these experiments were heavily constrained to reproduce the main characteristics of the Ponomarenko and G O Roberts flows respectively.

These results have led several experimental groups seeking dynamo action in less constrained geometry (eventually leading to richer dynamical regimes) to optimize the mechanical forcing using kinematic simulations based on mean flow measurements [6, 7]—with the advantage that mean flow profiles can be measured in the laboratory. It is thus of interest to test the validity of this procedure, and possibly to clarify the role played in magnetic field amplification by the mean flow as well as by the turbulent fluctuations.

We compare here numerically the dynamo behaviour as simulated from the magneto-hydrodynamics (MHD) equations (1) and (2), to the result of kinematic calculations in which the velocity is fixed to its time-averaged profile. In the fully dynamical problem, we integrate pseudospectrally the following equations in a 2π -periodic box:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla \mathcal{P} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{F}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v} + \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (2)$$

together with $\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$; a constant mass density $\rho = 1$ is assumed. Here, \mathbf{v} stands for the velocity field, \mathbf{B} is the magnetic field (or the Alfvén velocity), $\mathbf{j} = (\nabla \times \mathbf{B})/\mu_0$ is the current

density, and \mathcal{P} is the pressure. The forcing term \mathbf{F} is given by the TG vortex [8]

$$\mathbf{F}_{\text{TG}}(k_0) = 2F \begin{bmatrix} \sin(k_0x) \cos(k_0y) \cos(k_0z) \\ -\cos(k_0x) \sin(k_0y) \cos(k_0z) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

with $k_0 = 1$. In [3] $k_0 = 2$ was used and thus, at the same resolution, the Reynolds numbers, based on the energy containing scale, are here approximately twice that of the previous study.

For a given viscosity, we first let the flow settle into a statistically hydrodynamic (non-magnetic) steady state (only equation (1) is solved with $\mathbf{B} = \mathbf{0}$). We either use direct numerical simulations (DNS) for flows with R_V up to ~ 1000 and P_M down to ~ 0.2 , or large eddy simulation (LES) schemes with an effective viscosity ν_{eff} [9] for P_M lower than about 0.01. Details of the dynamical runs are given in section 2. In the kinematic runs, equation (2) alone is solved with a prescribed (average) flow, details are given in section 3. Section 4 presents the results of both sets of simulations, and compares the values of R_M^c for each set. Finally, section 5 contains some conclusions and discusses the implications of these results for our understanding of large- and small-scale dynamo action when $P_M < 1$ and a large-scales flow is present in the system.

2. Dynamical runs

We first describe our dynamical runs. The mechanical Reynolds number is increased by lowering ν and keeping $F = 1.5$ fixed; numerical grid sizes go from 64^3 to 256^3 . For all runs, the ratio of the largest resolved wavenumber k_{max} to the viscous dissipation one k_ν is larger than one, ensuring a correct hydrodynamic resolution [10]. Moreover, we computed structure functions in DNS $S_p(\mathbf{l}) = \langle [\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{l})]^p \rangle$ up to order $p = 4$. As is conventional in numerical simulations of turbulence we have verified that at small-scales the velocity increments obey the trivial scaling $S_p(l) \sim l^p$ for $\ell_{\text{min}} < |\mathbf{l}| < 3\ell_{\text{min}}$ where $\ell_{\text{min}} = 2\pi/k_{\text{max}}$ is the smallest increment in physical space [31]. Thus the small-scales field is smooth and the dissipation is well captured in the DNS.

Once the hydrodynamic steady state is reached, a seed magnetic field with energy 10^{-20} evenly distributed among Fourier modes is introduced, and the MHD equations are integrated for several magnetic diffusion times. For each run, we compute the growth rate $\sigma_B = d(\ln E_M)/dt$, where E_M is the magnetic energy. The critical magnetic Reynolds number in the dynamical runs, denoted as $R_{M,\text{dyn}}^c$, is defined as the value of R_M for which σ_B changes sign at fixed R_V . In these runs, $R_{M,\text{dyn}}$ is defined as $R_{M,\text{dyn}} = U_{\text{dyn}} L_{\text{dyn}}/\eta$ where U_{dyn} and L_{dyn} are respectively the r.m.s. velocity and integral scale in the dynamical flow before the magnetic seed is introduced—a precise definition of the integral scale is given below in equation (5). In the DNS, equations (1) and (2) are numerically integrated, whereas in the LES the large-scales dynamic is accounted for but the velocity fluctuations at scales smaller than the Ohmic dissipation scale are modelled (as a result, the magnetic field is directly resolved at all scales) [3, 9, 11]. The LES was validated against experiments in [9], and the value of R_M^c from the LES was validated against DNS and another subgrid model of MHD turbulence in [3].

Table 1. Run parameters for cases where the mean flow is computed: grid resolution, viscosity (effective value for the last run with LES), integral length and velocity scales, Reynolds number $R_{V,\text{dyn}} = L_{\text{dyn}}U_{\text{dyn}}/\nu$, critical magnetic Reynolds number $R_{M,\text{dyn}}^c$ for the dynamical problem and for the kinematic ones ($R_{M,\text{kin}}^{c1}$ at onset of the first dynamo mode, $R_{M,\text{kin}}^{c2}$ when it no longer grows, and $R_{M,\text{kin}}^{c3}$, the onset of the second dynamo mode). The $R_{M,\text{kin}}$ values are computed using the kinematic integral velocity and length scales, and the critical magnetic diffusivity: $R_{M,\text{kin}}^{ci} = L_{\text{kin}}U_{\text{kin}}/\eta^{ci}$, where $i = 1, 2$ or 3 . The asterisk indicates the run is an LES.

N	ν	L_{dyn}	U_{dyn}	$R_{V,\text{dyn}}$	$R_{M,\text{dyn}}^c$	$R_{M,\text{kin}}^{c1}$	$R_{M,\text{kin}}^{c2}$	$R_{M,\text{kin}}^{c3}$
64	0.3	3.1	1.4	15	34	22.0	53.2	142
64	0.1	3.3	2.2	77	48	23.9	48.7	150
64	0.08	3.5	2.3	98	59	23.7	50.6	155
128	0.04	3.4	2.5	190	110	23.3	51.6	152
128	0.015	2.6	2.6	460	170	24.6	50.8	149
256	0.007	2.4	2.8	930	180	22.3	52.6	145
128*	8.6×10^{-4}	2.3	2.8	7950	150	23.5	51.2	167

3. Kinematic runs

Kinematic runs (cf table 1) are later computed for a subset of the dynamical runs, for which we define the mean flow \mathbf{U} as a time average of the dynamical velocity \mathbf{v} :

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}) = \frac{1}{T} \int dt \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \quad (4)$$

where T is a time much larger than an eddy turnover time T_{NL} at the integral scale L_{dyn} , i.e. $T \ll T_{\text{NL}} = U_{\text{dyn}}/L_{\text{dyn}}$. Note that T should exceed the magnetic diffusion time $T_{\text{M}} = R_{\text{M}}T_{\text{NL}}$. In practice, an instantaneous velocity field is extracted from the dynamical simulations every time interval ΔT to increment the running average of $\mathbf{U}(\mathbf{r})$. We used $\Delta T \sim T_{\text{NL}}/100$, and $T > 200T_{\text{NL}}$. To save computer time, the averaging is done during the linear growth (or decay) phase in the dynamical runs—hence in the absence of a Lorentz feedback in the Navier–Stokes equation. Equation (2) is then solved with $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{U}(\mathbf{r})$, in search of growing solutions $E_{\text{M}}(t) = E_{\text{M}}^0 \exp(\sigma_{\text{B}}^{\text{kin}} t)$ with positive $\sigma_{\text{B}}^{\text{kin}}$. Note that the mean flow (see equation (4)) is no longer a solution of the hydrodynamic equations. For instance, it does not have a well-defined viscosity in the sense that there is no known relationship from which one could compute a viscosity from the $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ as opposed to the dynamical flow for which the velocity skewness is related to the dissipation and, hence, the viscosity. We therefore chose to attribute to the mean flow the viscosity of its generating dynamical run. Then one can also define an associated kinematic Reynolds number $R_{V,\text{kin}} = U_{\text{kin}}L_{\text{kin}}/\nu$, but instead we chose to represent all mechanical Reynolds number variations as a function of $R_{\text{V}} \equiv R_{V,\text{dyn}}$ (see e.g. figures 1 and 3).

As for the magnetic Reynolds numbers, two definitions can be introduced. The critical magnetic Reynolds number can be given in terms of $R_{M,\text{dyn}}$ or $R_{M,\text{kin}}$, computed from each field’s characteristic lengths and r.m.s. velocities. Instead of giving two critical values for all kinematic runs, figure 2 shows the thresholds R_{M}^c for the kinematic runs in units of $R_{M,\text{kin}}$ (see also

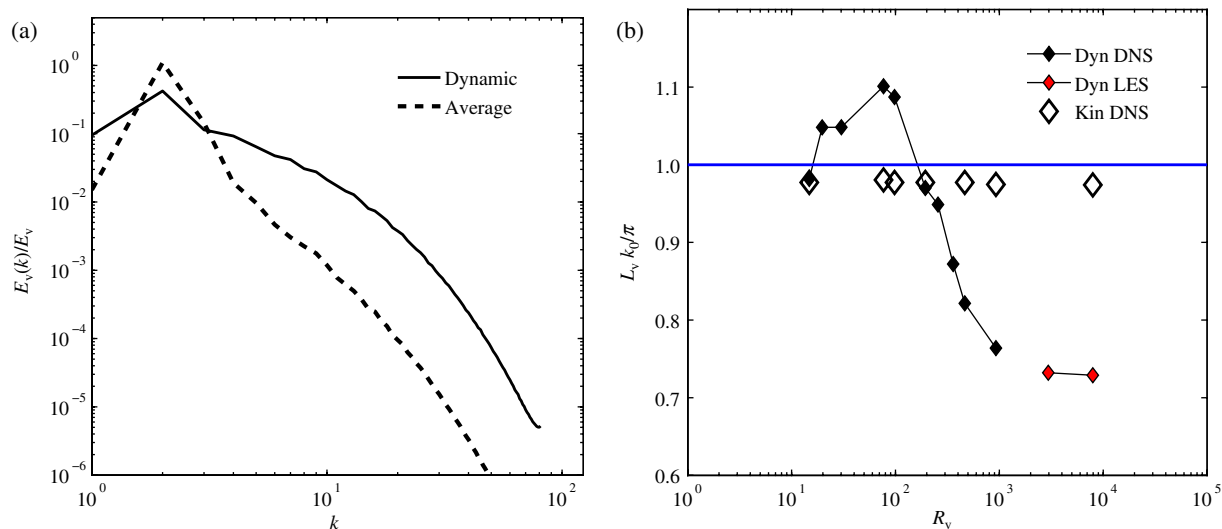


Figure 1. (a) Kinetic energy spectra for TG1 ($\nu = 0.007$); dynamical spectrum $E_{V,\text{dyn}}(k, t = T)$ (solid line), and average flow spectrum $E_{V,\text{kin}}(k)$ (dotted line); (b) integral length scales L_{dyn} and L_{kin} , normalized by the size of the unit TG cell, versus the flow Reynolds numbers $R_V \equiv R_{V,\text{dyn}}$.

table 1), and two curves corresponding to the thresholds for the dynamical runs in units of $R_{M,\text{dyn}}$ and $R_{M,\text{kin}}$.

4. Results

Before analysing the dynamo behaviour, we first compare characteristics of the dynamic and time-averaged velocity fields. Their spectra are shown in figure 1(a), for the DNS calculation at $R_{V,\text{dyn}} \approx 930$. While the dynamical flow has a typical turbulence spectrum, the time-averaged field is sharply peaked at the size of the TG cell. As the mechanical Reynolds number varies the properties of the average flow are the same, while they do vary for the dynamical field. For instance, the flow integral scale computed from the kinetic energy spectrum as

$$\frac{L}{2\pi} = \left\langle \frac{\int dk E_V(k, t)/k}{\int dk E_V(k, t)} \right\rangle_T \quad (5)$$

is shown in figure 1(b); we define $\langle \cdot \rangle_T$ as a time average and we recall that the TG flow is forced at $k_0 = 1$. For mechanical Reynolds numbers smaller than about 100, L_{dyn} tends to be larger than the size of one TG vortex ($\approx \pi$). At higher R_V s, the turbulent flow has an integral lengthscale clearly confined within the TG cell. The mean flow, however, has $L_{\text{kin}} \approx \pi$ and $U_{\text{kin}} \approx 3$ at all R_V s.

We now turn to the dynamo generation. In the dynamical problem, the $R_{M,\text{dyn}}^c$ versus R_V curve—figure 2(b)—displays an initial increase, corresponding to the development of turbulence, followed by a plateau [3] where the threshold is independent of viscosity. This behaviour has been observed now for several coherent forcing functions (helical and non-helical) [3, 12, 13], while for isotropic and homogeneous random forcing no saturation of R_M^c as a function of R_V

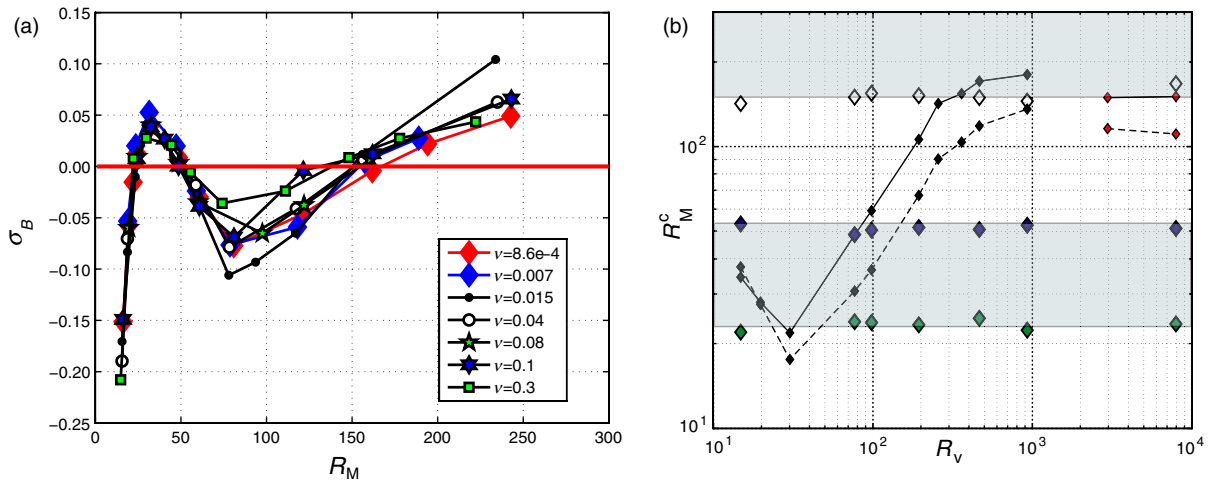


Figure 2. (a) Growth rates for the kinematic dynamo generated by mean flows computed for decreasing viscosity. Crossing the $\sigma_B = 0$ axis defines the $R_{M,\text{kin}}^{1,2,3}$ values reported in table 1. (b) Evolution of the critical magnetic Reynolds numbers $R_{M,\text{kin}}^c$ and $R_{M,\text{dyn}}^c$ with R_V . Symbols: the green, blue and white parallelograms mark the dynamo windows for the kinematic low and high modes; the smaller symbols follow the dynamical curves (black: DNS, red: LES) plotted either in units of $R_{M,\text{dyn}}$ (solid line) or in units of $R_{M,\text{kin}}$ (dashed line)—see text for further details. The shaded areas indicate regions of dynamo action as obtained from the time-average runs, in units of $R_{M,\text{kin}}$. The dynamical run at $R_V = 928$ is a 256^3 DNS computation, higher Reynolds number are reached using LES). Note that the lowest P_M for a dynamo is 10^{-2} .

has been found so far (see e.g. [14, 30] and references therein). In the case of coherent forcing, both excitation of magnetic field lines at scales smaller than the forcing scale (with all Fourier modes growing with the same growth rate), and excitations of large-scales magnetic fields (which keep growing after the small-scales saturate) are observed [12]. This suggests that the mean flow associated with the coherent forcing plays an important role to obtain an asymptotic behaviour of R_M^c for $P_M < 1$. However, the effect of the turbulent fluctuations on the value of R_M^c and dynamo action is harder to elucidate and to separate from the effect of the mean flow.

For kinematic simulations using the time-averaged flow, we found the existence of two distinct dynamo branches—a behaviour already revealed in the *ABC* flow [15]. As shown in figure 2(a), the kinematic growth rate is positive in the interval $[R_{M,\text{kin}}^1, R_{M,\text{kin}}^2] \approx [22, 50]$, and then again for $R_{M,\text{kin}} > R_{M,\text{kin}}^3 \approx 160$. Beyond $R_{M,\text{kin}}^3$ the growth rate seems to be monotonously increasing with R_M . We call the interval $[R_{M,\text{kin}}^1, R_{M,\text{kin}}^2]$ the ‘first dynamo window’ (the corresponding interval is shaded in figure 2(b)). We observe this window is essentially independent of the mechanical Reynolds number $R_{V,\text{dyn}}$ from which the time-averaged flow is generated. The threshold for the upper dynamo branch— $R_{M,\text{kin}}^3$ —also appears to be independent of the kinetic Reynolds number; we have observed that it remains within 15% of the value $\langle R_{M,\text{kin}}^3 \rangle \approx 160$ when R_V is varied across our explored range $[10, 10^4]$.

Essential findings in this paper come from the comparison of the above kinematic behaviour with the results obtained for the dynamo thresholds computed for the dynamical fields. The data

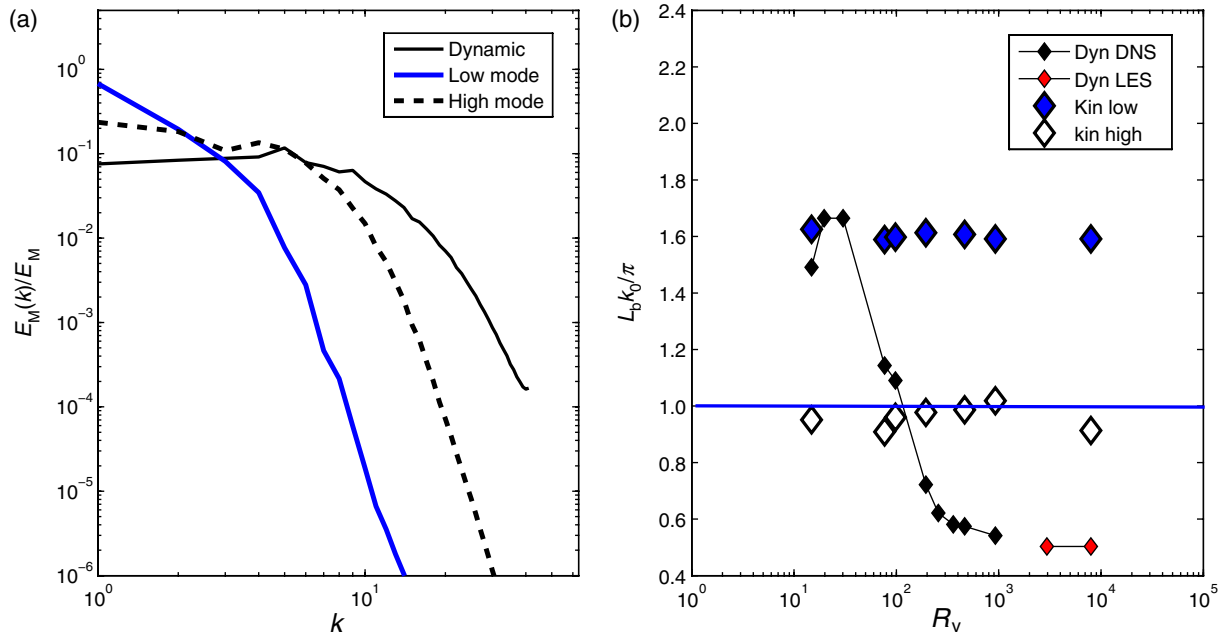


Figure 3. (a) Magnetic energy spectra for $\nu = 0.007$; (solid line) dynamical run, (thick blue solid line) low and (short dashed lines) high R_M kinematic dynamo modes in the average flow—in this regime the spectra are computed as averages during the growth phase, normalized by the mean energy. (b) Evolution of the integral scales for the magnetic field, computed from the spectra.

are shown in figure 2(b) in which all critical magnetic Reynolds numbers R_M^c are plotted against the kinetic Reynolds number R_V . At low R_V , the dynamo threshold for the dynamical runs $R_{M,dyn}^c$ lies within first dynamo window of the time-averaged flow. But as R_V exceeds about 200, $R_{M,dyn}^c$ is found in the immediate vicinity of the upper dynamo branch of the time-averaged flow.

A quite noteworthy feature is revealed when the dynamo thresholds obtained for the dynamical fields are plotted in terms of $R_{M,kin}^c$, i.e. using L_{kin} and U_{kin} as length and velocity scales [16]. Then one observes that dynamo action takes place outside the windows for which kinematic dynamos are found. Actually, the threshold computed in this way is below the kinematic upper branch. We attribute this difference as evidence of the role of turbulent fluctuations. At this point it may be unclear from figure 2(b) whether the effect of the fluctuations in the dynamical runs is to increase the threshold from the first kinematic window, or to decrease the threshold from the second kinematic branch. We shall return to this issue in the discussion section.

A comparison of the structure of the resulting dynamo fields, the magnetic energies, and the corresponding integral length scales is shown in figure 3. For the dynamical dynamo runs, energy is distributed in a broad range of scales. For the kinematic dynamos evolved from the time-averaged flow, we observe that for the low R_M mode the energy is strongly peaked at large-scales, while it is more evenly distributed in the case of the high R_M mode. However, the magnetic energy spectrum is not as broad as in the dynamical runs using the instantaneous flow. Note also the dynamical runs have a range of wavenumbers (at the large-scales) where the slope of the magnetic energy spectrum is positive, while the spectrum in the kinematic runs monotonically decreases with increasing wavenumber. This difference can be the result of the lack of dynamo action from the large- and small-scale fluctuations in the runs done using the average flow.

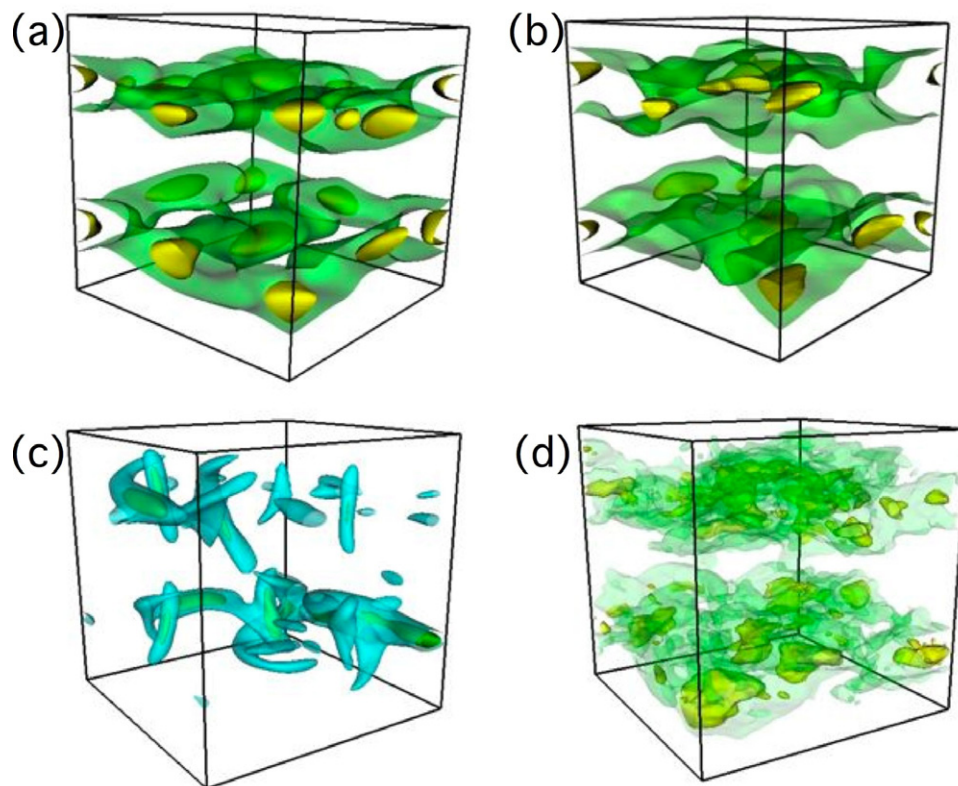


Figure 4. Isosurfaces of the magnetic energy. (a) TG1 kinematic low eigenmode; (b) corresponding dynamical run at $R_V = 76.74$; (c) high kinematic eigenmode; (d) corresponding dynamical run at $R_V = 465$. Isovalues at 50 and 75% of the maximum of E_M for (a) and (b) and 25 and 50% for (b) and (d).

Changes in dynamo behaviour are also reflected in the evolution of the magnetic integral scale L_B , shown in figure 3(b). The kinematic ‘low mode’ grows a dynamo essentially at scales *larger* than the TG cell ($L_B \approx 1.6\pi$) at all R_V . For the ‘high mode’ on the other hand, magnetic fields grow within a TG vortex. The dynamo mode selected by the dynamical flow seems to switch between these two behaviours. At low R_V it grows with an integral scale larger than the TG cell, and we observe that $L_{B,\text{dyn}} \sim L_{B,\text{kin}}$. At high R_V the magnetic integral scale is about half the size of the TG cell. The peak in the magnetic energy spectrum at smaller scales in the dynamical runs, as well as the smaller integral scale, together with the differences in the two dynamical curves in figure 2(a), suggest that turbulent fluctuations may play a role enhancing the dynamo—in agreement with [12] where both large- and small-scales were observed to cooperate. The growth of small magnetic scales allows the quenching of velocity fluctuations later in the nonlinear regime, and hence helps the growth of the magnetic field at large-scales.

The structure of the dynamos can be explored further with visualizations of isosurfaces of magnetic energy in real space. Figures 4(a) and (c) correspond respectively to the low and high kinematic dynamo modes, while figures 4 (b) and (d) show the dynamical fields, with the magnetic energy rescaled and averaged in time during the linear growth phase (i.e. $\langle E_M(\mathbf{x}, t) / E_M(t) \rangle_T$) for $R_V \approx 77$ and $R_V \approx 460$. One observes a good correspondence between the low R_V dynamical mode and the kinematic low eigenfunction; indeed, at low Reynolds number the flow is laminar

with small fluctuations about its mean; in this regime the dynamo is mainly generated in the shearing regions between the TG cells [12, 17]. At high R_V , comparing the dynamical growing dynamo to the structure of the high R_M eigenfunction, we recognize in figure 4(c) the ‘twisted banana’ structure of the neutral mode that underlies the $\alpha - \Omega$ dynamo in von Kármán flows (note that at high R_V the TG flow in each cell is similar to the von Kármán swirling flow) [7, 17]. For the dynamical flow at high R_V the TG cells are no longer as coupled as they are at low R_V , and in figure 4(d) one does not observe the clear pattern of the kinematic eigenmode. As seen in the spectrum—figure 3(a)—the magnetic energy in the dynamical runs at high R_V grows at all scales; it is only in the nonlinear phase that the magnetic energy is eventually dominated by the large-scales. However, at all R_V s the dynamo grows predominantly in the planes $\pi/2$ and $3\pi/2$ which cut through the centre of the TG cells. We observed a similar behaviour for TG flows forced at $k_0 = 2$ (two branches in the kinematic dynamo problem, and a transition of the value of R_M^c in the dynamical runs from the lower kinematic runs to a value close to the higher branch as turbulence develops). Results may differ for other types of forcings [13].

5. Discussion

The observations made, particularly at large R_V , may have some relevance for laboratory experiments. For instance, we find that once turbulence is fully developed, the dynamo threshold in the dynamical runs (in units of $R_{M,dyn}^c$) is well approximated by the (high branch) kinematic value $R_{M,kin}^c$ computed using the time-averaged flow. Differences between the threshold in the dynamical runs in units of $R_{M,kin}^c$ and $R_{M,dyn}^c$ can be attributed to the effect of turbulent fluctuations, as is discussed below. These findings are in agreement with the observations in the Riga and Karlsruhe experiments, where the mean flow structure was optimized to favour dynamo action with a moderate value of R_M^c ; it agrees as well with analytical predictions for small amplitude fluctuations around the mean flow structure [18].

We also observe that the threshold reaches an asymptotic value when R_V grows, in agreement with kinematic simulations using von Kármán mean flows measured in the laboratory [7]: the threshold was observed to be R_V independent for R_V in excess of $\sim 10^5$. Hence one may expect that kinematic predictions based on hydrodynamic measurements in laboratory prototypes can be useful for experiments. This is also of interest for numerical studies of natural dynamos, where a fully resolved description of the fluid motions in the correct range of parameters is currently out of reach [19]. There are however reasons to be cautious. The main concern lies in the observation that fully turbulent flows in confined volumes are not stationary: long-time dependence (i.e. slow changes) in the large-scales velocity fluctuations has been observed [20, 21]. Also, the effect of turbulent fluctuations on the threshold may need further study. While recent works have shown that a large-scales incoherent noise may increase significantly the dynamo threshold [22], small-scale fluctuations can also be a source of dynamo action [1, 23, 24].

This leads us to our last question. The central role played by the average flow is clear from the kinematic simulations. But can the results obtained so far be used to elucidate the role played by the velocity fluctuations in the dynamo process when $P_M < 1$ and a mean flow is present? Two scenarios can be foreseen. The net effect of velocity fluctuations can be to enhance the magnetic effective diffusivity (thus giving a larger value of R_M^c in the dynamical runs than in the kinematic runs), or to be a source of dynamo action (thus giving a smaller value of R_M^c). Analysis of kinematic runs perturbing the average flow with synthetic noise seem to suggest

the first scenario [22], but it should be remarked that the properties of the turbulent fluctuations are not independent of the properties of the flow in the large-scales [25]. On the other hand, the results presented here and results from spectral transfer analysis [26] seem to favour the second scenario.

Let us review the evidence so far. The analysis presented here separates mean flow from fluctuations based on timescales. This is a common practice in studies of turbulent flows, that can be complemented by a separation based on lengthscales. From the timescale analysis, we observe that the value of R_M^c in the dynamical runs is smaller than the corresponding value of the ‘high branch’ in the kinematic runs when both quantities are plotted in units of $R_{M,kin}^c$ (see figure 2). However, the dynamical dynamo mode shares some properties with the ‘high branch’ kinematic mode. We also observe a positive slope in the magnetic energy spectrum ($\sim k^{3/2}$ [3]) of the dynamical runs that is not observed in the kinematic average-flow simulations. This positive slope is consistent with (non-local) dynamo contributions [23, 24], [27]–[29] due to the turbulent fluctuations (possible in the large-scales) and certainly not with a direct magnetic energy transfer.

A spectral analysis based on lengthscales [26] also showed that turbulent fluctuations at all scales give nonlocal stretching of magnetic field lines. For TG forcing (at $k_0 = 2$), $R_M \approx 680$ and $P_M < 1$ it was found that the fluctuations at all wavenumbers up to $k \approx 12$ are also a source of dynamo action that overcomes Ohmic diffusion as well as the removal of magnetic energy due to the direct transfer to smaller scales (a turbulent enhanced diffusion), thus contributing to the positive growth rate in all these wavenumbers. The observations presented, both in the time and space domain, indicate fluctuations at all scales (even at the forced scales) play a role in magnetic field amplification, and that under the proper conditions (e.g. if the mechanical and magnetic Reynolds numbers are large enough) the dynamo action due to these fluctuations can overcome the enhanced turbulent dissipation and cooperate with the stretching of magnetic field lines due to the average flow.

Acknowledgments

We thank F Daviaud, B Dubrulle, R Volk and A Schekochihin for useful discussions. PDM and AP acknowledge partial support from NSF CMG–0327888 at NCAR. JFP, HP and YP thank CNRS Dynamo GdR, INSU/PNST, and PCMI Programs. Computer time was provided by NCAR, PSC, NERSC, IDRIS and the Mesocentre SIGAMM machine, hosted by Observatoire de la Cote d’Azur.

References

- [1] Moffatt H K 1978 *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [2] 2002 Special issue: MHD dynamo experiments *Magnetohydrodynamics* **38**
- [3] Ponty Y, Minnini P D, Pouquet A, Politano H, Montgomery D C and Pinton J-F 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 164512
- [4] Steiglitz R and Müller U 2001 *Phys. Fluids* **13** 561
Gailitis A et al 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 4365
- [5] Gailitis A 1996 *Magnetohydrodynamics* **1** 63
Tilgner A 1997 *Phys. Rev. A* **226** 75
- [6] Bayliss R A, Forest C B, Nornberg M D, Spence E J and Terry P W 2007 *Phys. Rev. E* at press

- [7] Marié L, Burguete J, Daviaud J and Léorat J 2003 *Eur. J. Phys. B* **33** 469
Ravelet F *et al* 2005 *Phys. Fluids* **17** 117104
- [8] Brachet M 1990 *C. R. Acad. Sci. Paris* **311** 775
Brachet M 1991 *Fluid Dyn. Res.* **8** 1
- [9] Ponty Y, Politano H and Pinton J-F 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 144503
- [10] Kaneda Y *et al* 2003 *Phys. Fluids* **15** L21
Yoshida K, Ishihara T and Kaneda Y 2003 *Phys. Fluids* **15** 2385
- [11] Knaepen B and Moin P 2004 *Phys. Fluids* **16** 1255
- [12] Mininni P D, Ponty Y, Montgomery D C, Pinton J-F, Politano H and Pouquet A 2005 *Astrophys. J.* **626** 853
- [13] Mininni P D and Montgomery D C 2005 *Phys. Rev. E* **72** 056320
- [14] Schekochihin A A, Haugen N E L, Brandenburg A, Cowley S C, Maron J L and McWilliams J C 2005 *Astrophys. J.* **625** L115
- [15] Galloway D J and Frisch U 1986 *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **36** 53
- [16] Ponty Y, Mininni P D, Pinton J-F, Politano H and Pouquet A 2006 *Preprint physics/0601105*
- [17] Nore C, Brachet M, Politano H and Pouquet A 1997 *Phys. Plasmas* **4** 1
- [18] Pétrélis F and Fauve S 2001 *Eur. Phys. J. B* **22** 273
- [19] Dormy E, Valet J-P and Courtillot V 2000 *Geochem. Geophys. Geosyst.* **1** 62
- [20] Bourgoin M, Marié L, Petrelis F, Burguete J, Chiffaudel A, Daviaud F, Fauve S, Odier P and Pinton J-F 2001 *Phys. Fluids* **14** 3046
- [21] Volk R, Odier P and Pinton J-F 2006 Fluctuation of magnetic induction in von Kármán swirling flows *Phys. Fluids* **18** 085105
- [22] Laval J-P, Blaineau P, Leprovost N, Dubrulle B and Daviaud F 2005 *Phys. Rev. Lett.* **96** 204503
- [23] Zeldovich Ya, Ruzmaikin A and Sokoloff D 1983 *Magnetic Fields in Astrophysics* (New York: Gordon and Breach)
- [24] Kraichnan R H 1968 *Phys. Fluids* **11** 945
Kazantsev A P 1968 *Sov. Phys.—JETP* **26** 1031
- [25] Alexakis A, Mininni P D and Pouquet A 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 264503
Mininni P D, Alexakis A and Pouquet A 2006 *Phys. Rev. E* **74** 016303
Poulain C, Mazellier N, Chevillard L, Gagne Y and Baudet C 2006 *Eur. Phys. J. B* **53** 219
- [26] Alexakis A, Mininni P D and Pouquet A 2005 *Phys. Rev. E* **72** 046301
Mininni P D, Alexakis A and Pouquet A 2005 *Phys. Rev. E* **72** 046302
- [27] Schekochihin A A, Cowley S C, Taylor S F, Maron J L and McWilliams J C 2004 *Astrophys. J.* **612** 276
- [28] Vainshtein S and Kichatinov L 1986 *J. Fluid Mech.* **168** 73
Boldyrev S and Cattaneo F 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 144501
- [29] Haugen N E L, Brandenburg A and Dobler W 2004 *Astrophys. Space Sci.* **292** 53
- [30] Schekochihin A A, Cowley S, Hammett G, Maron J and McWilliams J C 2002 *New J. Phys.* **4** 84
Schekochihin A A, Cowley S, Maron J and McWilliams J C 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 054502
- [31] Davidson P 2000 *Turbulence* (Oxford: Oxford University Press)

B.4 Forçage de Taylor-Green et effets non-linéaires

B.4.1 Notes personnelles

Ce travail montre des effets non linéaires juste présent au dessus du seuil, un régime oscillant a été mise en évidence par Pablo Mininni. Dans cette publication, nous avons aussi présenté nos résultats sur le régime non linéaire de la dynamo, notamment la mise en évidence de la diminution de l'énergie cinétique dans les petites échelles dans la phase de saturation (Voir Figure 10 de l'article).

DYNAMO REGIMES WITH A NONHELICAL FORCING

PABLO D. MININNI,¹ YANNICK PONTY,² DAVID C. MONTGOMERY,³ JEAN-FRANCOIS PINTON,⁴
HELENE POLITANO,² AND ANNICK POUQUET¹

Received 2004 December 2; accepted 2005 February 24

ABSTRACT

A three-dimensional numerical computation of magnetohydrodynamic dynamo behavior is described. The dynamo is mechanically forced with a driving term of the Taylor-Green type. The magnetic field development is followed from negligibly small levels to saturated values that occur at magnetic energies comparable to the kinetic energies. Although there is locally a nonzero helicity density, there is no overall integrated helicity in the system. Persistent oscillations are observed in the saturated state for not-too-large mechanical Reynolds numbers, oscillations in which the kinetic and magnetic energies vary out of phase but with no reversal of the magnetic field. The flow pattern exhibits considerable geometrical structure in this regime. As the Reynolds number is increased, the oscillations disappear and the energies become more nearly stationary, but retain some unsystematically fluctuating turbulent time dependence. The regular geometrical structure of the fields gives way to a more spatially disordered distribution. The injection and dissipation scales are identified, and the different components of energy transfer in Fourier space are analyzed, particularly in the context of clarifying the role played by different flow scales in the amplification of the magnetic field. We observe that small and large scales interact and contribute to the dynamo process.

Subject headings: magnetic fields — MHD

Online material: color figures

1. INTRODUCTION

Evidence of the existence of magnetic fields is known in many astronomical objects. These fields are believed to be generated and sustained by a dynamo process (e.g., Moffatt 1978), and often these objects are characterized by the presence of large-scale flows (such as rotation) and turbulent fluctuations. These two ingredients are known to be often associated with magnetohydrodynamic dynamos. In recent years, significant advances have been made either studying large-scale flow dynamos in the kinematic approximation or using direct numerical simulations to study turbulent amplification of magnetic fields in simplified geometries.

In a previous paper (Ponty et al. 2005), a study of the self-generation of magnetic fields in a turbulent conducting fluid was reported. The study was computational and dealt mainly with the effects of lowering the magnetic Prandtl number P_M of the fluid (ratio of kinematic viscosity to magnetic diffusivity). The velocity field was externally excited by a forcing term on the right-hand side of the equation of motion whose geometry was that of what has come to be called the Taylor-Green vortex (Taylor & Green 1937; Morf et al. 1980; Pelz et al. 1985; Nore et al. 1997; Marié et al. 2003; Bourgoïn et al. 2004). The regime of operation was one of kinetic Reynolds number $\gg 1$ (so that the fluid motions were turbulent), and the emphasis was on how large the magnetic Reynolds numbers had to be for the infinitesimal magnetic fields to be amplified and grow to macroscopic values.

Here, we want to describe and stress another aspect of the Taylor-Green dynamo. In particular, we have found computation-

ally that it has an oscillatory regime, for not too large a Reynolds number, in which energy is passed back and forth regularly between the mechanical motions and the magnetic excitations in a way we believe to be new. Out of the velocity field emerges a geometrically regular, time-averaged pattern involving coherent magnetic and mechanical oscillations.

As the Reynolds number is increased, the resulting flow has a well-defined large-scale pattern and nonhelical turbulent fluctuations. In this case, the oscillations disappear, and the magnetic field grows at scales both larger and smaller than the integral scale of the flow. After the nonlinear saturation of the dynamo, velocity field fluctuations are partially suppressed, and a magnetic field with a spatial pattern reminiscent of the low Reynolds number case can be identified. This complex evolution of the magnetic field can be understood by studying the role played by the energy transfer in Fourier space.

In § 2, we describe the numerical experiments and outline a typical time history of the development of an oscillatory dynamo. We then go on to show how, by increasing the Reynolds number, the oscillatory behavior can be suppressed. In § 3, we make use of color displays of the field quantities to demonstrate the cycle of the oscillation and to reveal the intriguing and complex varying three-dimensional pattern that characterizes it. The pattern, although regular, is difficult to see through completely in physical terms. Finally, § 4 suggests some precedents, provides a partial explanation, and considers other similar situations in which such coherence may or may not be expected to emerge out of turbulent disorder.

2. THE COMPUTATION

The Taylor-Green vortex is a flow with an initial periodic velocity field

$$\mathbf{v}_{\text{TG}}(k_0) = \begin{bmatrix} \sin(k_0x) \cos(k_0y) \cos(k_0z) \\ -\cos(k_0x) \sin(k_0y) \cos(k_0z) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

¹ National Center for Atmospheric Research, P.O. Box 3000, Boulder, CO 80307-3000.

² Laboratoire Cassiopée, CNRS UMR6203, Observatoire de la Côte d'Azur, BP 4229, F-06034 Nice Cedex 04, France.

³ Department of Physics and Astronomy, 6127 Wilder Laboratory, Dartmouth College, Hanover, NH 03755.

⁴ Laboratoire de Physique, CNRS UMR5672, École Normale Supérieure de Lyon, 46 Allée d'Italie, 69007 Lyon, France.

and was originally introduced as an initial condition that, although highly symmetric, would lead to the rapid development of small spatial scales (Taylor & Green 1937). We introduce it here on the right-hand side of the magnetohydrodynamic (MHD) equation on motion for the velocity field \mathbf{v} :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla \mathcal{P} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nu \nabla \times \boldsymbol{\omega} + F \mathbf{v}_{\text{TG}}, \quad (2)$$

where \mathbf{B} is the magnetic field, advanced by

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v} - \eta \nabla \times \mathbf{j}. \quad (3)$$

Equations (2) and (3) are to be solved pseudospectrally. The current density is $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$ (we use the common dimensionless Alfvénic units), F is a forcing amplitude, and $k_0 = 2(2\pi/L)$, where $L = 2\pi$ is chosen as the basic periodicity length in all three directions. In the incompressible case, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ and $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$; ν^{-1} and η^{-1} are (dimensionless) mechanical and magnetic Reynolds numbers, since we take as characteristic velocity and length $U_0 = 1$ and $L_0 = 1$ leading to an eddy turnover time of order unity; and \mathcal{P} is the dimensionless pressure, normalized by the (uniform) mass density.

The strategy is to turn on a nonzero force F at $t = 0$ and allow the code to run for a time as a purely Navier-Stokes code, with the \mathbf{B} and \mathbf{j} fields set at zero. The initial velocity field is given by

$$\mathbf{v}_0 = -\frac{F}{\nu} \nabla^{-2} \mathbf{v}_{\text{TG}}, \quad (4)$$

and the amplitude of F is set to obtain an initial unitary rms velocity. As the system evolves, more modes are excited and the dissipation increases. To maintain the kinetic energy at the same level, the amplitude of the force is controlled during the hydrodynamic simulation to compensate the dissipation. At each time t , the energy injection rate,

$$\epsilon = F(t) \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_{\text{TG}} d^3x, \quad (5)$$

and the enstrophy,

$$\Omega = \frac{1}{2} \int (\nabla \times \mathbf{v})^2 d^3x, \quad (6)$$

are computed, and the amplitude of the external force needed to overcome dissipation is computed as

$$F^* = \frac{2\nu\Omega F(t)}{\epsilon}. \quad (7)$$

The response of the velocity field to the change in the external force has a certain delay, and to avoid spurious fluctuations the average value $\langle F^* \rangle$ of this quantity is computed for both the last nine time steps and the averaged error in the energy balance $\mathcal{E} = \langle 2\nu\Omega - \epsilon \rangle$. Finally, the amplitude of the external force at time $t + \Delta t$ is updated as

$$F(t + \Delta t) = 0.9F^* + (0.1\langle F^* \rangle + 0.01\mathcal{E})/9. \quad (8)$$

Once a stationary state is reached, the last computed amplitude of the force can be used to restart the simulation with constant force instead of constant energy. In this case, the energy fluctuates around its original value, and the rms velocity averaged in time is unity. This value of the rms velocity and the integral

length scale L_{int} of the resulting flow are used to define the Reynolds numbers in the following sections. For a different scheme to compensate the dissipation, see e.g., Archontis et al. (2003).

Once the stationary kinetic state is reached, the magnetic field is seeded with randomly chosen Fourier coefficients and allowed to amplify. All the MHD simulations are done with constant force, and the amplitude F is obtained as previously discussed. The initial magnetic field is nonhelical, with the magnetic energy smaller than the kinetic energy at all wavenumbers, and a spectrum satisfying a k^2 power law at large scales and an exponential decay at small scales. A previous paper has described the “kinematic dynamo” regime, in which the magnetic excitations, while growing, are too small to affect the velocity field yet (Ponty et al. 2005). In particular, a threshold curve for magnetic field amplification was constructed in the plane whose axes are a magnetic Prandtl number, $P_M \equiv \nu/\eta$, and a magnetic Reynolds number. As P_M^{-1} increases, there is a sharp rise in the dynamo threshold, followed by a plateau. Here, the purpose is to follow the evolution of \mathbf{B} out of the kinematic regime and observe whatever saturation mechanisms may set in.

3. COMPUTATIONAL RESULTS

Table 1 summarizes the parameters of the four runs we have carried out. Runs A and A' have relatively low mechanical and magnetic Reynolds numbers (~ 40 , based on the integral length scale and the rms velocity), while runs B and B' have mechanical Reynolds numbers of $R_V = 675$. The magnetic Reynolds numbers R_M for runs A and A' are 33.7 and 37.8, respectively, while those for B and B' were 240.2 and 270, respectively. These values of R_M were in all cases above the previously determined thresholds (Ponty et al. 2005) for magnetic field growth (see Fig. 1). Note that R_M for runs A and B is 6% above the threshold, while runs A' and B' are 20% above the threshold. We chose $k_0 = 2$ in all cases, so that the kinetic energy spectrum peaks at $k = k_0\sqrt{3} \approx 3$. As previously mentioned, the amplitude of the external force was constant during the MHD simulation, and given by $F = 0.926$ in runs A and A', and $F = 0.37$ in runs B and B'.

The definitions of the Taylor microscale λ and the integral scale L_{int} in Table 1 are based on the kinetic energy spectrum $E_V(k)$,

$$L_{\text{int}} = 2\pi \int k^{-1} E_V(k) dk \bigg/ \int E_V(k) dk, \quad (9)$$

$$\lambda = 2\pi \left[\int E_V(k) dk \bigg/ \int k^2 E_V(k) dk \right]^{1/2}. \quad (10)$$

Note that the usual turbulent relationships between these two quantities based on the mechanical Reynolds number do not hold, since the energy spectra of runs A and A' do not display an inertial range.

3.1. Low Reynolds Numbers and Close to the Threshold

The behavior at saturation is very different for the high and low Reynolds numbers. The histories of the energies for runs A and B (both 6% above threshold) are displayed in Figure 2. The upper two curves are the kinetic energies of these runs, a solid line for run A and a dotted line for run B. The lower two curves are the magnetic energies, with the same conventions. The origin of time is chosen from the moment when the seed magnetic fields are introduced.

It is clear that saturation is achieved unsystematically for the high R_V run B, with the resulting magnetic energy being smaller

TABLE 1
SIMULATIONS

Run	ν	η	R_V	R_M	R_M^c ^a	P_M ^b	L_{int}	λ^c	N^d	Δ^e
A.....	5×10^{-2}	6×10^{-2}	40.5	33.7	31.7	0.83	2.02	1.69	64^3	6
B.....	2×10^{-3}	5.62×10^{-3}	675	240.2	226.4	0.35	1.35	0.6	256^3	6
A'.....	5×10^{-2}	5.35×10^{-2}	40.5	37.8	31.7	0.93	2.02	1.69	64^3	20
B'.....	2×10^{-3}	5×10^{-3}	675	270	226.4	0.4	1.35	0.6	256^3	20

NOTE.—The Reynolds numbers R_V and R_M are based on the integral length scale L_{int} .

^a Critical Reynolds number obtained for the given R_V .

^b The magnetic Prandtl number is $P_M = \nu/\eta$.

^c Taylor scale.

^d Spatial grid resolution used in the simulation.

^e Gives the percentage above threshold in R_M for each simulation.

than the kinetic energy and both being in a statistically steady state. The solid lines associated with the lower Reynolds number run A, however, show a systematic, sharp oscillation in both energies, with the maxima of one almost coinciding with the minima of the other. This is clearly a significantly different behavior from the high R_V case, and is only partially understood. Such out-of-phase oscillations have already been observed in the nonlinear regime in constrained geometries, for example, by using a quasi-geostrophic model for strongly rotating flows (Schaeffer 2004) or a 2.5-dimensional formulation for the Ekman layer instability (Ponty et al. 2001).

In the two simulations presented in Figure 2, R_M is 6% larger than R_M^c , and the growth rates during the kinematic regime are similar. While η is 1 order of magnitude smaller in run B than in run A, the nonlinear saturation in both runs takes place at approximately the same time. In both runs the integral eddy turnover time is approximately the same. This contrasts with dynamos in flows with net helicity, in which the nonlinear saturation was shown to occur in a magnetic diffusion time (Brandenburg 2001) (the diffusion time based on the integral lengthscale of the flow is of the order of 60 for run A and 360 for run B). Note that although the flow generated by the Taylor-Green force is locally helical, the net helicity of the flow in the entire domain is zero.

The forcing term generating the flow from equations (2) and (3) is initially entirely in the horizontal (x, y) directions. It is essentially a vortical flow whose phase oscillates with increasing z . The velocity field in equation (2) is not, however, a steady state, and vertical (z) components develop quickly,

leading to an approximately meridional flow to be added to the toroidal one in each cell. A total streamline will resemble the shape of a wire wrapped around the outside of a doughnut, diagonally, which enters the hole of the doughnut at the bottom and emerges at the top. This flow shares similarities with the Cadarache and Wisconsin sodium experiments, and it has motivated several numerical studies of dynamo action at $P_M = 1$. For a detailed description of the flow, we refer the reader to Nore et al. (1997) and Marié et al. (2003).

The amplification process for the magnetic field is difficult to visualize in this geometry. Field lines seem to be sucked into the hole of the doughnut and stretched and twisted in the process. The resulting amplified magnetic flux is then deposited and piled up in the horizontal planes between the cells. This flux, in turn, is the source of the field lines, which are further sucked into the holes in the doughnut and amplified. In the kinematic regime, but in a different geometry (including boundary conditions), the amplification of a magnetic field by a similar flow was also discussed in Marié et al. (2003) and Bourgoïn et al. (2004).

Throughout the process, the rate of doing work by the magnetic field on the velocity field originates in the Lorentz force contribution, $-(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}$. This energy input into the magnetic field is ohmically dissipated by the ηj^2 integral. As the magnetic field grows, the fluid must work harder mechanically, because \mathbf{j} and \mathbf{B} are increasing. Since F is constant, eventually a limit is

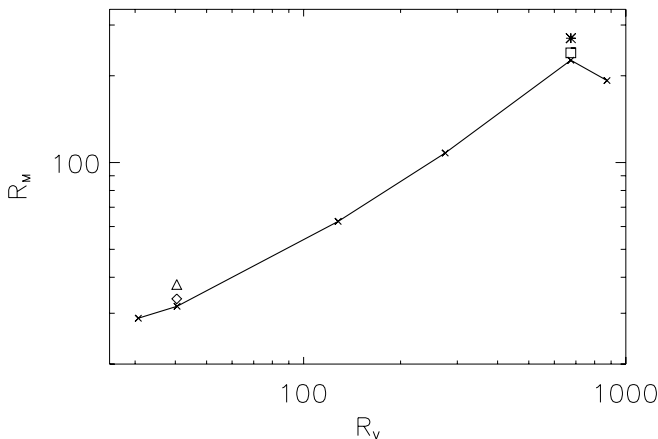


FIG. 1.—Critical magnetic Reynolds R_M^c for dynamo action (solid line) inferred from direct numerical simulations (crosses), as a function of R_V (Ponty et al. 2005). The position of the runs discussed in Table 1 are indicated by symbols: run A (diamond), A' (triangle), B (square), and B' (asterisk).

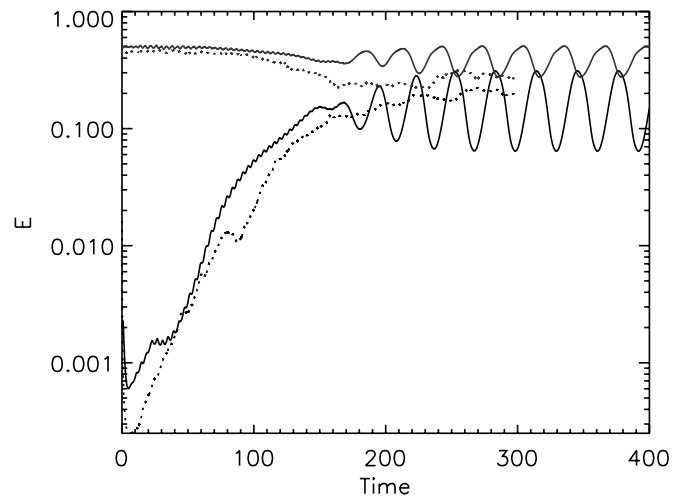


FIG. 2.—Time history of kinetic (upper curves) and magnetic energy (lower curves) for run A at low Reynolds (solid lines) and B at high Reynolds (dotted lines), both 6% above threshold. [See the electronic edition of the Journal for a color version of this figure.]

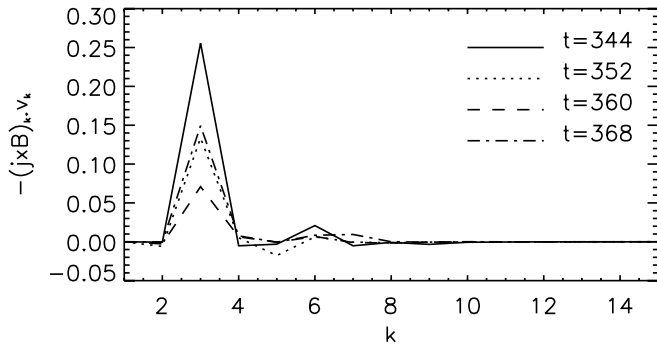


FIG. 3.—Fourier spectrum of $-(\mathbf{j} \times \mathbf{B})_k \cdot \hat{\mathbf{v}}_k^*$ for different times, for run A, for one oscillation.

reached at which \mathbf{v} can no longer transfer energy to \mathbf{B} at its previous rate and slows down. At that point, the magnetic energy begins to be transferred in the reverse sense, so that \mathbf{v} grows again as \mathbf{j} and \mathbf{B} become weaker. The cyclic nature of the process ensues.

It is revealing to decompose $(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}$ spectrally and plot the Fourier spectrum of $-(\mathbf{j} \times \mathbf{B})_k \cdot \hat{\mathbf{v}}_k^*$ as a function of k , where the asterisk denotes a complex conjugate and the real part is to be assumed, as shown in Figure 3 for run A. The peak near $k = 3$ shows that this is the region where the mechanical work is being done to create the magnetic energy. The curve is plotted at four times during a complete oscillation, including $t = 344$, when the magnetic energy is at its maximum during the cycle, and $t = 360$, when the magnetic energy is at its minimum.

There is considerable structure to the flow for these low Reynolds number cases, anchored by the driving term in equation (2). Figure 4 shows instantaneous plots of the velocity field components along a vertical cut at $x = 3\pi/8$ and $y = \pi/4$, as functions of z for run A. This cut corresponds to a line in the z -direction displaced (in the x - y plane) out of the center line of the vortices imposed by the external Taylor-Green force (corresponding to $x = y = \pi/4$). Plotted in Figure 4a is $(v_y^2 + v_z^2)^{1/2}$ versus z , and in Figure 4b, v_x versus z . In both curves, four different times are shown. In this cut, v_x corresponds to the amplitude of the toroidal flow associated with the vortices imposed by the forcing, while $(v_y^2 + v_z^2)^{1/2}$ can be associated with the meridional flow previously defined. Note the mirror symmetries satisfied by the flow. As the oscillations evolve, not only is the amplitude of the flow changed, but the position of the maxima are also slightly displaced. The flow geometry is clarified in more detail in Figure 5.

Figures 5a and 5b exhibit cross-sectional plots of the velocity field in the plane $z = 0$ at two different times for run A. The arrows show the directions of v_x - v_y , and the colors indicate the values of v_z , positive (light) or negative (dark), at the same locations. Note the 16 vortices imposed by the external Taylor-Green forcing with $k_0 = 2$. The amplitude of these vortices is modulated in z , and at $\pi/2$ the same structure is obtained in the flow but with the vortices rotating in the opposite direction. Most of the stretching of the magnetic field takes place in these cells. Between these structures, at $z = \pi/4$, stagnation points are present where the magnetic field piles up, as will be shown.

Figures 5c and 5d display similar plots at the plane $y = \pi/4$, with v_x , v_z indicated by the arrows, and v_y by color. The regions of alternating color correspond to the cross section of the vortices imposed by the Taylor-Green forcing. The meridional flow can also be identified in these cross sections. However, note that this flow during the cycle is modified by the magnetic field in a

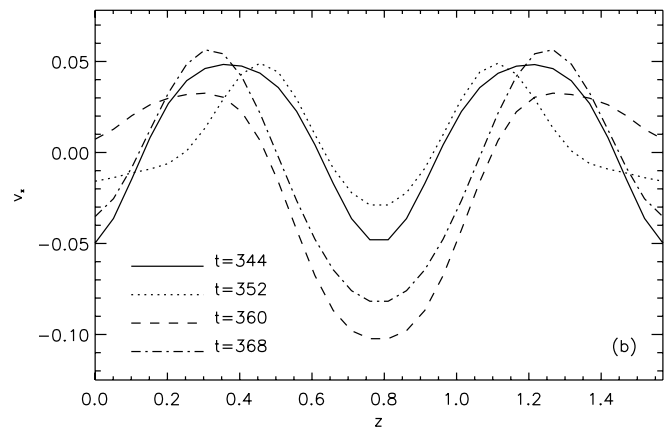
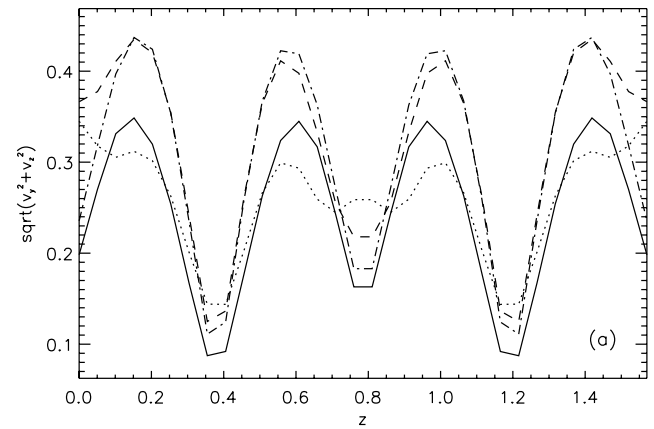


FIG. 4.—(a) $(v_y^2 + v_z^2)^{1/2}$ and (b) v_x as a function of z at $x = 3\pi/8$ and $y = \pi/4$, and at different times for run A, for one oscillation.

more dramatic way than the toroidal flow. As shown in Figures 3 and 4, the Lorentz force mostly opposes the velocity field at large scales. The final effect of the magnetic field on the flow seems to be to suppress small-scale fluctuations, leaving a well-ordered pattern. This effect is more dramatic at large R_V , as shown in § 3.2.

Figures 6a and 6b show the magnetic field in the plane $z = 0$ at the same times with the same conventions (B_x , B_y are arrows, B_z is indicated by color), again for run A. The stretching of magnetic field lines by the toroidal flow can be observed in these sections. Figures 6c and 6d show the magnetic field in the plane $y = \pi/4$ at the same times, and with the same plotting conventions. Note in dark and light colors the horizontal bars where most of the magnetic energy is concentrated. These regions correspond to stagnation planes of the external Taylor-Green forcing.

Finally, Figure 7 shows the magnetic field in the plane $z = \pi/4$ at different times for run A. This is a plane between rows of basic cells and is a candidate where the amplified flux “piles up” as previously indicated. It is apparent that the dynamical variation is much less in this plane during the cycle. Also in Figure 7 note the presence of locally “dipolar” structures (light and dark regions) centered in each of the Taylor-Green cells. These structures correspond to the almost uniform (and mostly concentrated in the x - y plane) magnetic field being sucked into the hole of the doughnut given by the Taylor-Green force.

A more detailed picture of the dynamics of the forced Taylor-Green dynamo at low Reynolds numbers has eluded us, but it is imaginable that in less complex flows a more comprehensive understanding of the low R_V nonhelical dynamo may be possible.

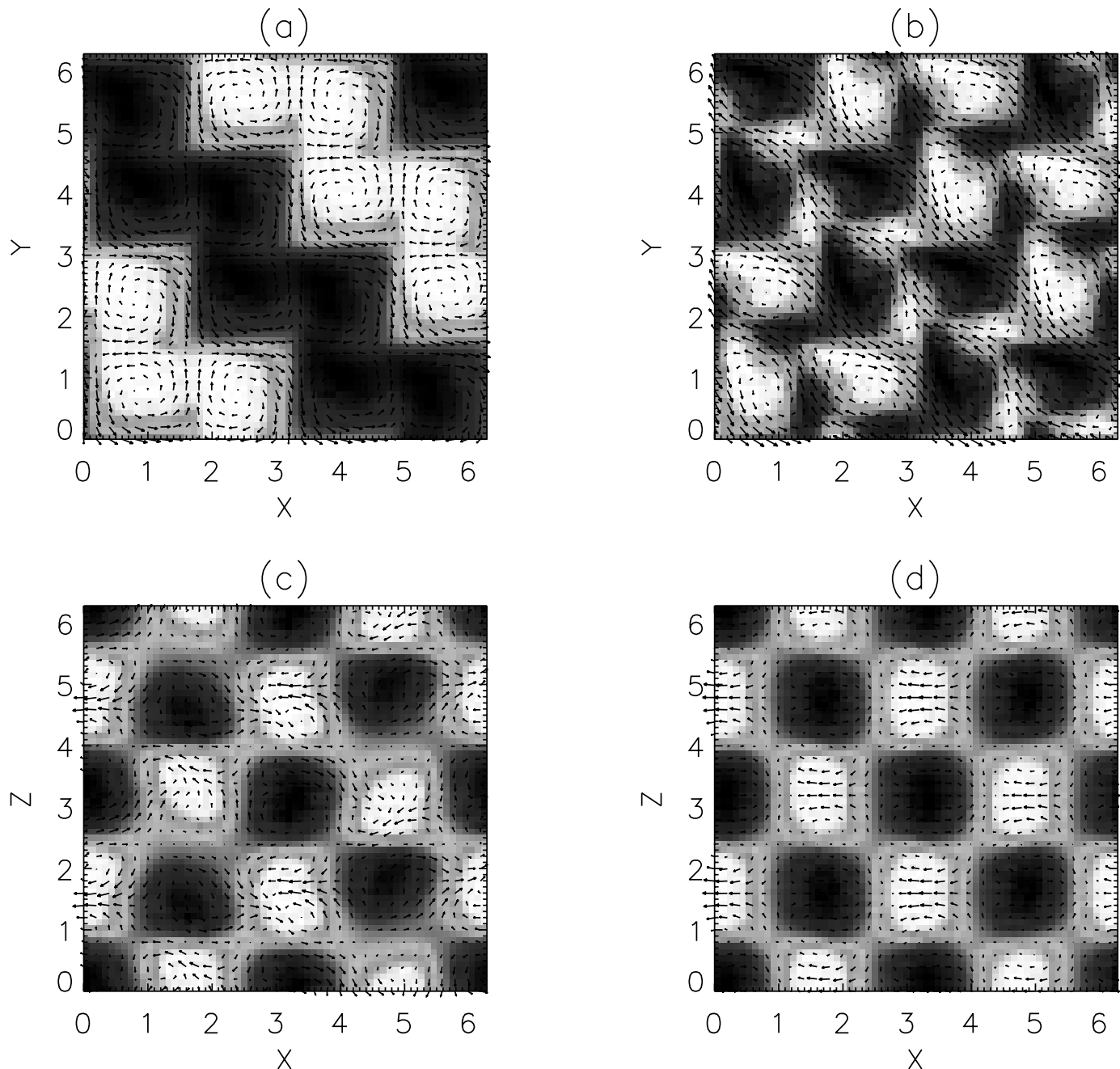


FIG. 5.—Upper panels: Cross-sectional plots of the velocity field in the plane $z = 0$ at (a) $t = 352$ and (b) $t = 368$, for run A. The arrows show the directions of v_x , v_y , and the colors indicate the values of v_z , positive (light) or negative (dark). Lower panels: Cross-sectional plots of the velocity field in the plane $y = \pi/4$ at (c) $t = 352$ and (d) $t = 368$ (v_x , v_z is indicated by the arrows, and v_y by the color). [See the electronic edition of the Journal for a color version of this figure.]

3.2. High Reynolds Numbers and Farther from the Threshold

Runs B and B' involve higher Reynolds numbers and behave rather differently from runs A and A'. Figure 8 contrasts the time histories of the kinetic energies and magnetic energies for run A' (solid lines) and run B' (dashed lines), both 20% above threshold. The upper curves are kinetic energies and the lower curves are magnetic energies. It is clear that runs B and B' saturate at a level of near equipartition and do not exhibit the oscillatory behavior seen in the lower Reynolds number runs. Run A' retains a vestige of the periodic behavior, seen most clearly in the magnetic energy curve, which is quasi periodic or close to "chaotic." Note the overshooting of the magnetic energy for run B' near $t \sim 150$, linked to the large drop in kinetic

energy. Note also the similar growth rates (as for runs A and B), although the magnetic diffusivities differ again by almost an order of magnitude.

During the exponential period of the magnetic energy growth, it is of interest to note that the various Fourier modes all appear to be growing at the same rate in run B' (the same effect is observed in run B). This can be seen by separating the Fourier space into "shells" of modes of the same width Δk . The time histories of these shells are plotted in Figure 9. In the inset, all the shells have been normalized to have the same amplitudes per k -mode at $t = 4$, to show that the exponentiation rates up to about $t = 30$ are the same or nearly so. This behavior is characteristic of small-scale dynamos (Kazantsev 1967; Brandenburg 2001). Note that after $t = 30$ the shell with $k = 2$

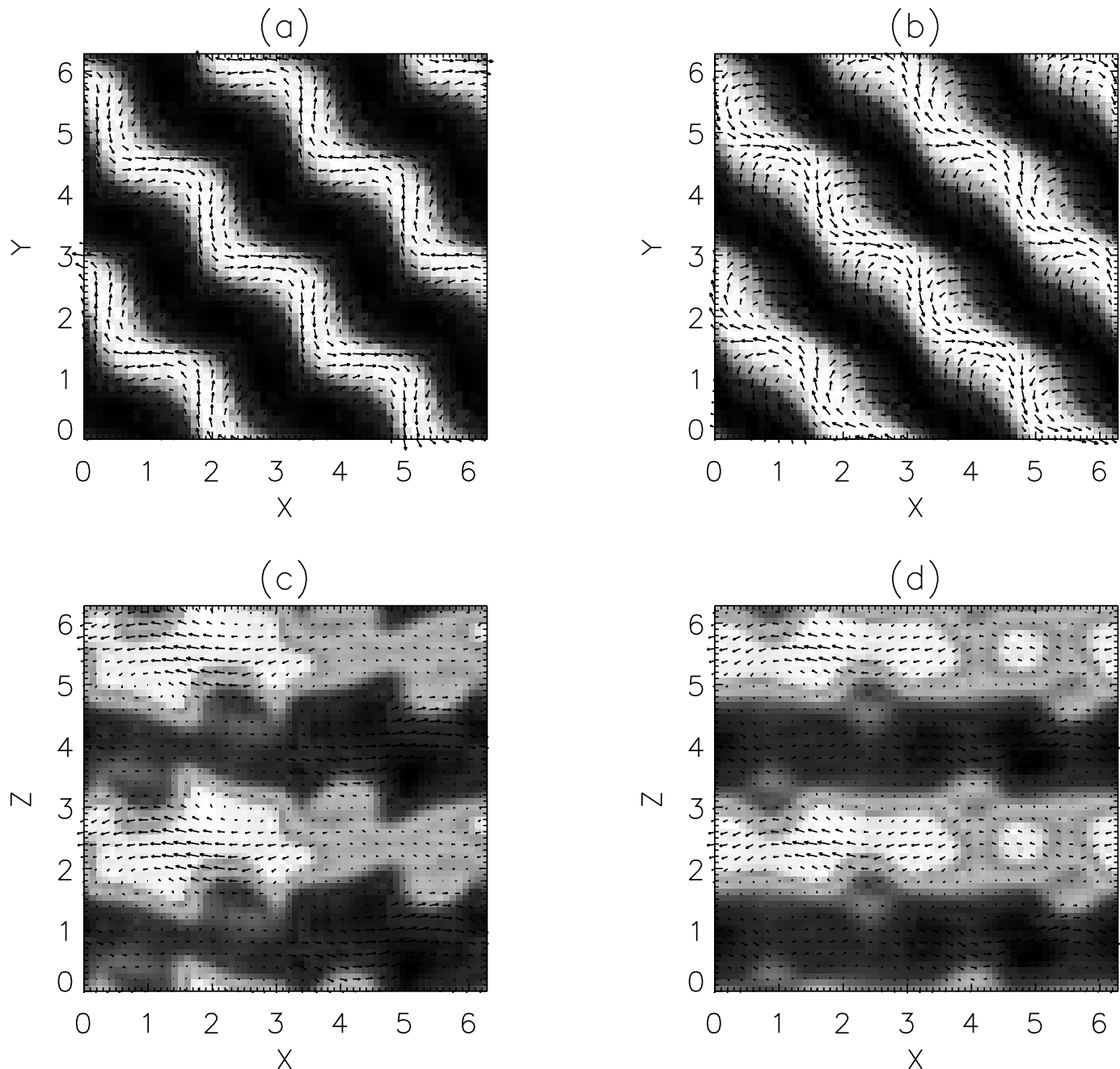


FIG. 6.—Upper panels: Cross-sectional plots of the magnetic field in the plane $z = 0$ at (a) $t = 352$ and (b) $t = 368$, for run A. Lower panels: Cross-sectional plots of the magnetic field in the plane $y = \pi/4$ at (c) $t = 352$ and (d) $t = 368$. Same conventions as in Fig. 5. [See the electronic edition of the Journal for a color version of this figure.]

seems to start growing faster than the small-scale modes. Shortly after this time, the small scales saturate and the large-scale magnetic field keeps growing exponentially up to $t = 150$.

Although here and in the following discussion we consider quantities averaged over angle in Fourier space to discuss the statistical evolution of kinetic and magnetic energy at different scales, it should be noted that a mean flow appears superimposed upon the turbulent fluctuations, as a result of the nonrandom external forcing. This mean flow should not be expected to be isotropic or homogeneous, as is usually assumed for Kolmogorov's turbulence.

The total kinetic energy spectra (*thick lines*) and magnetic energy spectra (*thin lines*) for run B' are shown in Figure 10. Only two kinetic spectra are shown, at times $t = 11.4$ and $t =$

181.8. At early times, the magnetic energy spectrum peaks at small scales ($k \approx 9$), and the spectrum at large scales seems to satisfy a $k^{3/2}$ power law, as already observed for the Taylor-Green flow (Ponty et al. 2005), and for other flows as well (Haugen et al. 2004). The magnetic energy increases from $t = 11.4$ to $t = 181.8$ and eventually dominates the kinetic energy at the longest wavelength.

The appearance of these quasi-DC components of the magnetic field seems to have a profound effect on the short-wavelength kinetic spectral components, depressing them by an order of magnitude, as is also visible from the thick dashed line in Figure 10. The most straightforward interpretation is in terms of what is sometimes called the Alfvén effect. The idea is that in incompressible MHD, any nearly spatially uniform, slowly varying

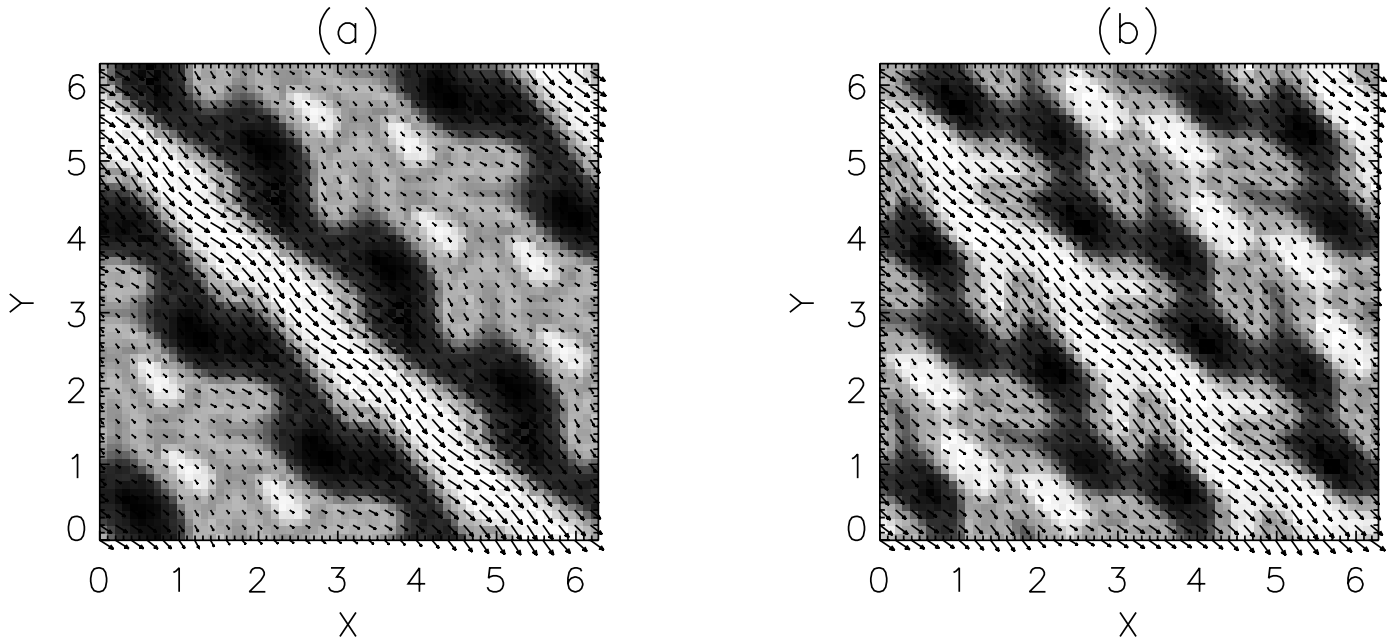


FIG. 7.—Cross-sectional plots of the magnetic field in the plane $z = \pi/4$ at (a) $t = 352$ and (b) $t = 368$, for run A. Same conventions as in Fig. 5. [See the electronic edition of the Journal for a color version of this figure.]

magnetic field forces the small-scale excitations to behave like Alfvén waves. In an Alfvén wave, the energy is generally equipartitioned between magnetic field and velocity field, and any mechanism that damps one will damp the other. Since $\eta \gg \nu$ when $P_M \ll 1$, the Kolmogorov “inner scale” can be defined entirely in terms of energy dissipation rate and η , regardless of how much smaller the viscosity is.

This was already observed in closure computations of MHD turbulence at low P_M by Léorat et al. (1981). Although in our simulations the magnetic Prandtl number is not small enough to ensure a large-scale separation between the different dissipative scales, to the best of our knowledge this is the first time this effect predicted by closures has been observed in a direct nu-

merical simulation. In a previous work (Ponty et al. 2005), the behavior of the dynamo threshold using Taylor-Green forcing from $P_M = 1$ down to 10^{-2} was studied using direct numerical simulations and two independent models of MHD turbulence. At a mechanical Reynolds number of 675 and $P_M^{-1} = 2.98$, the threshold curve for dynamo action is observed to level off, and an asymptotic regime is reached where the critical magnetic Reynolds number required to have dynamo instability turns out to be independent of P_M . Simulations B and B' are in the vicinity of this asymptotic regime, corresponding to low values of the

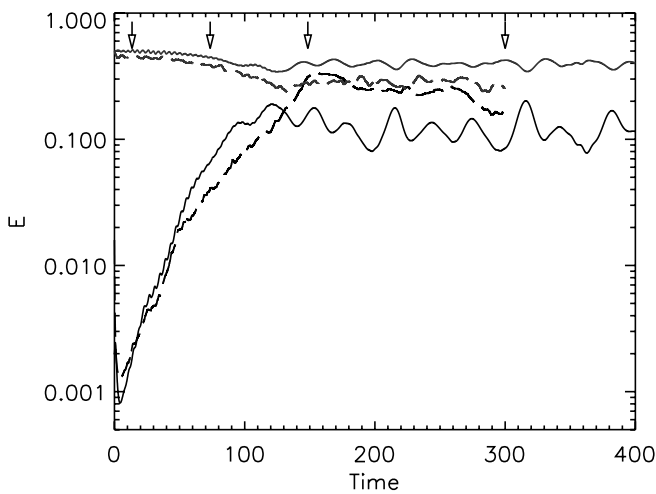


FIG. 8.—Time history of kinetic (upper curves) and magnetic energy (lower curves) for run A' at low Reynolds number (solid lines) and B' at high Reynolds number (dotted lines), both 20% above threshold. The arrows on the top of the figure represent the times at which the transfer terms displayed in Fig. 11 are evaluated. [See the electronic edition of the Journal for a color version of this figure.]

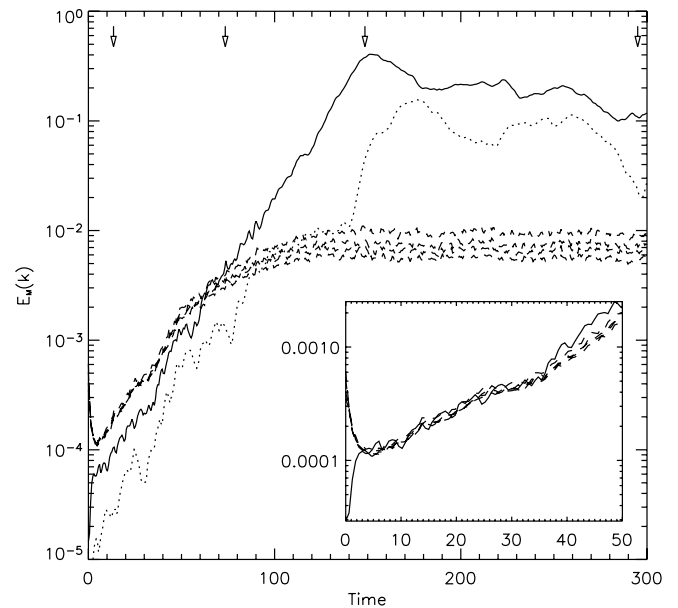


FIG. 9.— B^2 integrated over different shells in Fourier space as a function of time, for run B' and $k = 1$ (dotted line), $k = 2$ (solid line), and $k = 9, 10, 11$, and 12 (dashed lines). The inset shows the evolution at early times, with all the shells normalized to have the same amplitude. The arrows are at the same times as in Fig. 8.

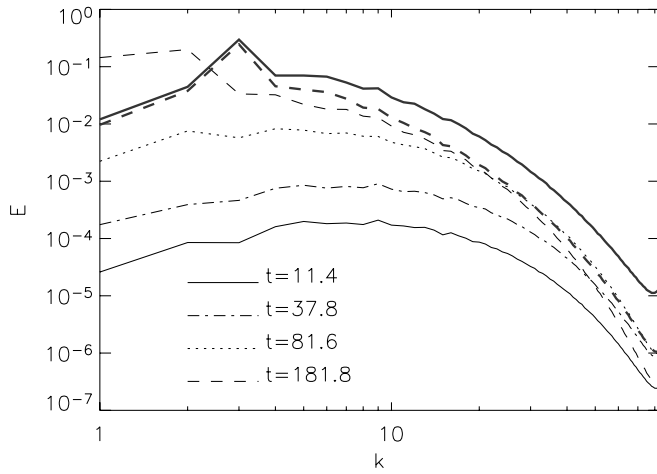


FIG. 10.—Kinetic (*thick lines*) and magnetic energy spectra (*thin lines*) as a function of time for run B'. Kinetic spectra are only shown at $t = 11.4$ and $t = 181.8$; note in the latter case, the strong diminution of the kinetic energy spectrum at small scales and its similarity to the magnetic spectrum there. [See the electronic edition of the *Journal* for a color version of this figure.]

magnetic Prandtl number. For a different external forcing (see, e.g., Schekochihin et al. [2004] and Haugen et al. [2004] for the implications of a purely random and nonhelical force), the asymptotic behavior as a function of P_M can differ.

Note that with high Reynolds numbers, in the pure hydrodynamic case, excitations will go farther out in k space. But once a large-scale magnetic field is present, if small scales behave like an approximately equipartitioned Alfvén wave, the larger transport coefficient will drain both the \mathbf{v} and \mathbf{B} fields (resistivity in this case). One could jump to the conclusion that for $\nu/\eta \ll 1$, the dynamo process will behave as if P_M were of $\mathcal{O}(1)$ at all times (see Yousef et al. [2003] for different simulations supporting this conclusion). We warn that this is certainly inappropriate in the formation, or kinematic phase, when the magnetic field is small but amplifying, and there is no quasi-DC magnetic field to enforce the necessary approximate equipartition at small scales. This warning can also apply in more complex systems, such as during the reversals of the Earth's dynamo.

The central role played by the $-\mathbf{v} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B})$ term by which energy is extracted from the velocity field can be clarified by plotting the transfer functions $T(k)$ for the magnetic field and velocity field as functions of k at different times.

The energy transfer function

$$T(k) = T_V(k) + T_M(k) \quad (11)$$

represents the transfer of energy in k -space and is obtained by dotting the Fourier transform of the nonlinear terms in the momentum equation (2) and in the induction equation (3) by the Fourier transform of \mathbf{v} and \mathbf{B} , respectively. It also satisfies

$$0 = \int_0^\infty T(k') dk', \quad (12)$$

because of energy conservation by the nonlinear terms; one can also define

$$\Pi(k) = \int_0^k T(k') dk', \quad (13)$$

where $\Pi(k)$ is the energy flux in Fourier space. In equation (11), $T_V(k)$ is the transfer of kinetic energy

$$T_V(k) = \int \hat{\mathbf{v}}_k \cdot \left[-(\widehat{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}})_k + (\widehat{\mathbf{j} \times \mathbf{B}})_k \right]^* d\Omega_k, \quad (14)$$

where the hat denotes Fourier transform, the asterisk complex conjugate, and $d\Omega_k$ denotes integration over angle in Fourier space. In this equation and the following, it is assumed that the complex conjugate of the integral is added to obtain a real transfer function.

The transfer of magnetic energy is given by

$$T_M(k) = \int \hat{\mathbf{B}}_k \cdot \nabla \times (\widehat{\mathbf{v} \times \mathbf{B}})_k^* d\Omega_k, \quad (15)$$

and we can also define the transfer of energy due to the Lorentz force,

$$T_L(k) = \int \hat{\mathbf{v}}_k \cdot (\widehat{\mathbf{j} \times \mathbf{B}})_k^* d\Omega_k. \quad (16)$$

Note that this latter term is part of $T_V(k)$; it gives an estimation of the alignment between the velocity field and the Lorentz force at each Fourier shell (as shown previously in Fig. 3). This term also represents energy that is transferred from the kinetic reservoir to the magnetic reservoir [in the steady state, the integral over all k of $T_L(k)$ is equal to the magnetic energy dissipation rate, as follows from eq. (3)].

Figure 11 shows the transfer functions $T(k; t = 0)$, which corresponds to the total energy transfer in the hydrodynamic simulation, since the magnetic seed has just been introduced; $T(k)$, which is the total energy transfer; $T_V(k)$; $T_M(k)$; and $-T_L(k)$, as functions of k for four different times for run B'. A gap in one of the spectra indicates (since the plotting is logarithmic) that it has changed sign. It is apparent that the dominant transfer is always in the vicinity of the forcing band, although it is quite spread over all wavenumbers in the inertial range at all times. It is also apparent that at the later times, most of the transfer is magnetic transfer, in which, of course, the velocity field must participate (see eq. [15]).

During the kinematic regime (Fig. 11a), the kinetic energy transfer $T_V(k)$ is almost equal to the total transfer. Note that $-T_L(k)$ is approximately constant between $k \approx 3$ and $k \approx 12$; all these modes in the magnetic energy grow with the same growth rate (see Fig. 9). The negative sign of $T_L(k)$ shows that energy is being extracted from the velocity field; in physical space the electromagnetic force associated with the currents induced by the motion of the fluid opposes the change in the field in order to ensure the conservation of energy, as follows from Lenz's law. On the other hand, the amplified magnetic field is getting its energy from the velocity field. Note that then $-T_L(k)$ can be used as a signature of the scale at which the magnetic field extracts energy from the velocity field [compare this result with the low R_V case, where $-T_L(k)$ peaks at $k = 3$ both in the kinematic regime and in the nonlinear stage]. As its counterpart, the transfer of magnetic energy $T_M(k)$ represents both the scales at which magnetic field is being created by stretching and the nonlinear transfer of magnetic energy to smaller scales. The $T_L(k)$ is peaked at wavenumbers larger than $T_M(k)$; the magnetic field extracts energy from the flow at all scales between $k \approx 3$ and $k \approx 12$, and this energy turns into magnetic energy at smaller scales. Note that this is in agreement with theoretical arguments (Verma 2004) and closures (Pouquet et al. 1976) suggesting that

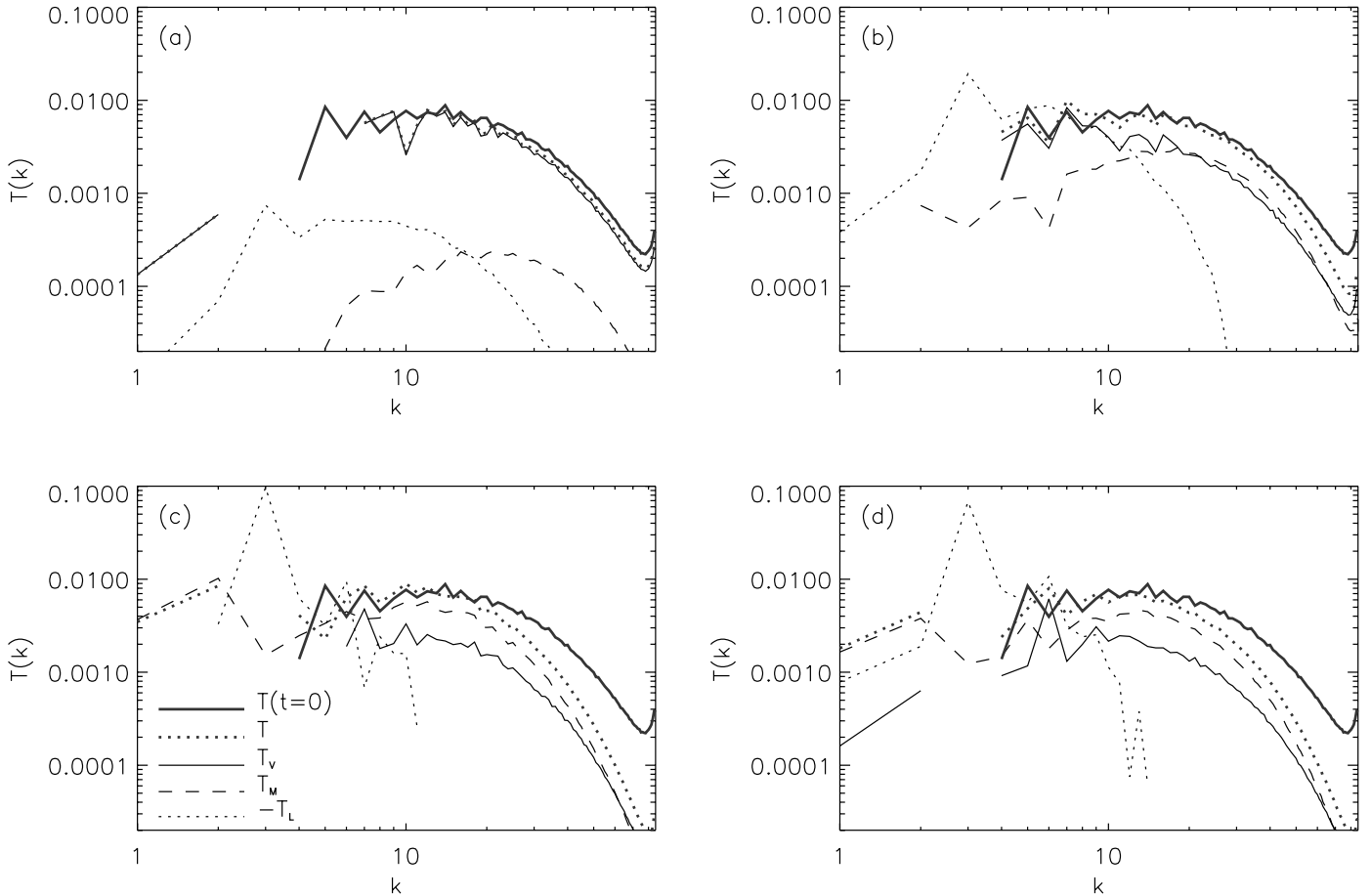


FIG. 11.—Transfer of energy in Fourier space in run B', at (a) $t = 13.5$ in the kinematic regime (see Fig. 9), (b) $t = 73.5$ at the end of the kinematic regime, (c) $t = 148.5$ at the time of rapid growth of the $k = 2$ shell, and (d) $t = 300$. In all the figures, the total transfer at $t = 0$ (thick solid line) is shown as a reference (which corresponds to the $\mathbf{B} = 0$ case); dotted, dashed, and solid lines represent transfer as indicated in (c). Since T_L is negative at most k , $-T_L$ is shown. [See the electronic edition of the Journal for a color version of this figure.]

in nonhelical MHD turbulence dominated by kinetic energy, the transfer from \mathbf{v} to \mathbf{B} can take place nonlocally from large wavenumbers to smaller wavenumbers.

As time evolves and the magnetic small scales saturate, a peak in $-T_L(k)$ grows at $k = 3$ (Fig. 11b). At the same time, the transfer of kinetic energy $T_V(k)$ at small scales is quenched (compared with Fig. 11a, it has diminished in amplitude by almost 1 order of magnitude). This time corresponds to the time at which a large-scale ($k = 2$) magnetic field starts to grow (see Figs. 9 and 10). In the saturated regime (Figs. 11c and 11d) $T_L(k)$ is negative at large scales and peaks strongly at $k = 3$ at late times. A substantial fraction of the injected mechanical energy is seen to be extracted by the magnetic field in the injection band ($k = 3$). As previously mentioned, $T_M(k)$ represents energy extracted from the kinetic reservoir, which will be finally injected into the magnetic reservoir (not necessarily at the same scales). Note that $T_M(k)$ peaks at $k = 2$. This magnetic energy is then carried to small scales by the magnetic field [$T_M(k) > T_V(k)$ up to the diffusion scale in the steady state; Figs. 11c and 11d]. A counterpart of this dynamic was observed in Haugen et al. (2004), in which it was noted by examination of global quantities that most of the energy injected in the saturated regime of the dynamo is dissipated by the magnetic field. Similarly, in run B we find that $\langle \nu \omega^2 \rangle / \langle \eta j^2 \rangle \approx 0.4$ at $t = 300$. This is associated with the drop in the kinetic energy spectrum at late times (Fig. 10). Note also that the transfer functions $T_V(k)$ and $T_M(k)$ drop together at small scales.

In summary, during the kinematic regime the magnetic field is amplified in a broad region of k -space, while in the nonlinear phase most of the amplification takes place at large scales. This contrasts with the low R_V and $P_M \approx 1$ case, where the magnetic energy grows at large scales ($k = 2$) from the beginning of the kinematic dynamo phase, the small scales being undeveloped.

Finally, we may ask if anything remains visible of any pattern enforced by the forcing function Fv_{TG} in the higher Reynolds number runs. Figure 12 suggests that the answer is yes. This figure is a plot for run B' of a cross section ($y = \pi/4$) in which the magnetic field strength is exhibited: arrows denote components in the plane and colors denote components normal to the plane. The left panel is at $t = 70$, and the right panel is at $t = 300$. The two horizontal bands are associated with the stagnation planes of the Taylor-Green forcing.

While at $t = 70$ the magnetic field is mostly at small scales, at $t = 300$ a pattern reminiscent of the low R_V case (Fig. 6d), albeit more turbulent, can be clearly seen. This is the result of the suppression of small scales by the magnetic field. While in the kinematic regime the magnetic field grows under a broad kinetic energy spectrum, when the large-scale magnetic field starts to grow, the small-scale velocity field fluctuations are quenched (Figs. 10 and 11), and the large-scale pattern reappears. This “cleanup” effect was also observed in Brandenburg et al. (2001), but there both the large-scale pattern in the flow and the turbulent fluctuations at small scale were imposed, while here the turbulent

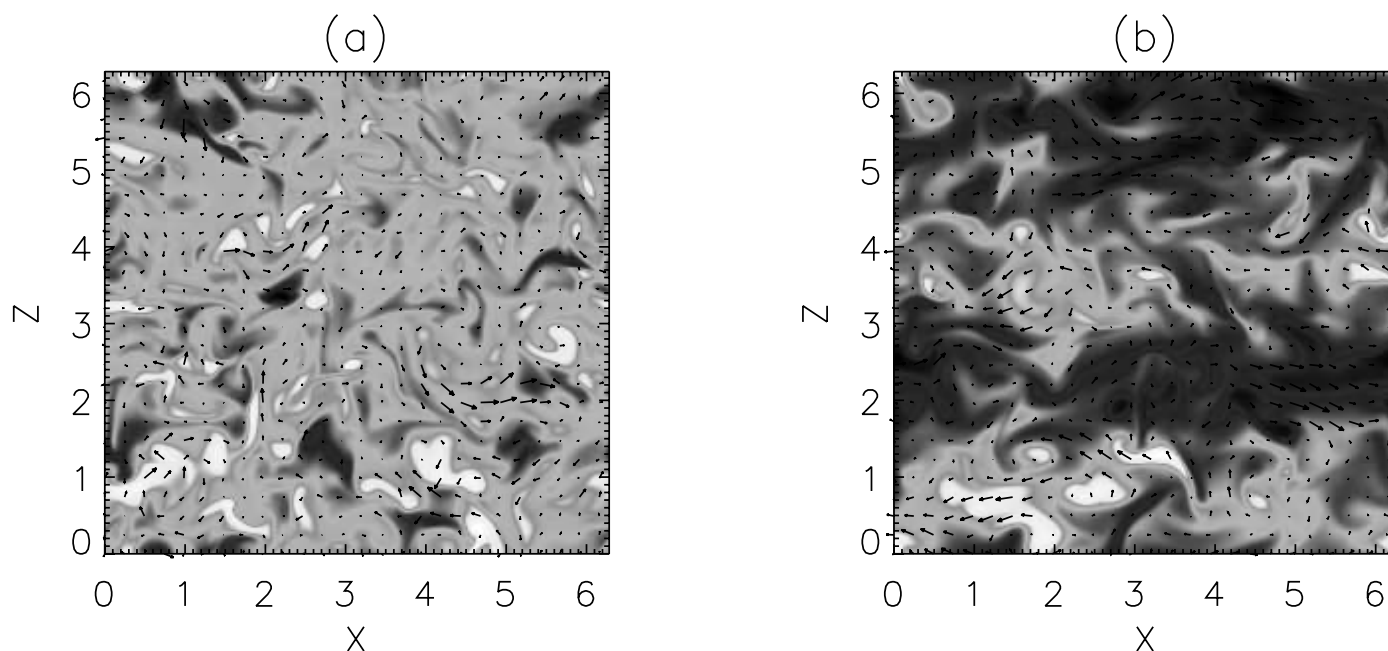


FIG. 12.—Cross-sectional plots of the magnetic field in the plane $y = \pi/4$, at (a) $t = 70$ and (b) $t = 300$ (B_x , B_z is indicated by the arrows, and B_y by the color) for run B'. [See the electronic edition of the Journal for a color version of this figure.]

fluctuations are the result of the large-scale external force and high values of R_ν .

4. DISCUSSION AND SUMMARY

The oscillatory behavior exemplified in Figure 2 is not without precedent. It is common for a pulsation to occur in a faucet when the pressure drop is such as to cause the flow of the water to be close to a speed near the threshold of the transition to turbulence. The developing turbulence acts as an eddy viscosity to reduce the Reynolds number back into the laminar regime. As the turbulence then subsides, the flow accelerates until the flow speed is again in the unstable regime, and the cycle repeats. A few years ago (Shan & Montgomery 1993a, 1993b), a similarly quasi-periodic behavior was observed in an MHD problem, which might be considered an opposite limit of the dynamo problem. A quiescent, periodic circular cylinder of magnetofluid was supported by an external axial magnetic field and carried an axial current driven by an applied axial voltage. By increasing the axial current, it was possible to cross a stability boundary for the onset of mechanical motion. The unstable modes were helical, with regard to the behavior of \mathbf{v} and \mathbf{B} . The resulting $-\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ axial electromotive force opposed the sense of the applied electric field and constituted an effective increase in the resistance of the column. When the disturbances grew large enough, the total axial current was reduced back below the stability threshold, causing the magnetofluid to relaminarize itself. A cyclic oscillation in magnetic and kinetic energy resulted, with the larger energy being magnetic, which in many ways resembles qualitatively the oscillations exhibited in Figure 2, except that the magnetic energy remained larger: a sort of “inverse dynamo” problem.

In the high Reynolds case (runs B and B'), part of this dynamic persists. The initial kinetic energy spectrum is broader, and velocity field fluctuations are larger. The large-scale flow is still present but is modified by the turbulent fluctuations. In the kinematic regime, the magnetic field grows at all wavenumbers with the same growth rate, and the magnetic energy spectrum is peaked at scales smaller than the integral length scale of the flow. After the nonlinear saturation of the small-scale magnetic field, the field grows at scales larger than the integral scale of the flow. There are

no recognizable common features between the magnetic field in the kinematic regime and the magnetic structures observed in the low Reynolds number case. However, in the steady state of the dynamo, the large-scale magnetic field forces small-scale excitations to be equipartitioned between magnetic and velocity fields, and both fields are damped at almost the same scale. As a result, velocity fluctuations are strongly suppressed, and at late times similar structures can be recognized in the magnetic field in both the low and high Reynolds simulations.

By examination of nonlinear transfer functions in Fourier space, interactions at large and small scales between kinetic and magnetic energy were found. During the kinematic regime, the magnetic field extracts energy from the velocity field at intermediate scales, and this energy is turned into magnetic energy at smaller scales. After the saturation and quenching of the small scales, a substantial fraction of the kinetic energy is still extracted from the forcing band, and the magnetic field grows at large scales. In the saturated regime, the magnetic and kinetic energy transfer functions drop at the same scale, although the magnetic transfer is larger than the kinetic one.

It is clear that there are many distinct dynamo behaviors, depending upon the parameters and the nature and scale of the mechanical forcing. It should not be inferred that the oscillatory behavior shown in Figure 2 is more generic than it is. Different regimes can appear as the forcing amplitude is varied, for example, or as the timing of the seed magnetic field's introduction is varied. The dynamics can acquire different qualitative features as these features are changed. It can be expected that, once turbulent computations in geometries other than rectangular periodic ones are undertaken, still further variety may occur.

We thank H. Tufo for providing computer time at University of Colorado, Boulder, NSF ARI grant CDA-9601817. Computer time was also provided by NCAR. The NSF grants ATM-0327533 at Dartmouth College and CMG-0327888 at NCAR supported this work in part and are gratefully acknowledged. J. F. P., H. P., and Y. P. thank the CNRS Dynamo GdR and INSU/PNST Program for support.

REFERENCES

- Archontis, V., Dorch, S. B. F., & Nordlund, A. 2003, *A&A*, 410, 759
- Bourgoin, M., Odier, P., Pinton, J.-F., & Ricard, Y. 2004, *Phys. Fluids*, 16, 2529
- Brandenburg, A. 2001, *ApJ*, 550, 824
- Brandenburg, A., Bigazzi, A., & Subramanian, K. 2001, *MNRAS*, 325, 685
- Haugen, N. E., Brandenburg, A., & Dobler, W. 2004, *Phys. Rev. E*, 70, 036408
- Kazantsev, A. P. 1967, *Soviet Phys.-JETP*, 26, 1031
- Léorat, J., Pouquet, A., & Frisch, U. 1981, *J. Fluid Mech.*, 104, 419
- Marié, L., Burguete, J., Daviaud, F., & Léorat, J. 2003, *European J. Phys. B*, 33, 469
- Moffatt, H. K. 1978, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids* (Cambridge: Cambridge Univ. Press)
- Morf, R. H., Orszag, S. A., & Frisch, U. 1980, *Phys. Rev. Lett.*, 44, 572
- Nore, C., Brachet, M. E., Politano, H., & Pouquet, A. 1997, *Phys. Plasmas*, 4, 1
- Pelz, R. B., Yakhot, V., Orszag, S. A., Shtilman, L., & Levich, E. 1985, *Phys. Rev. Lett.*, 54, 2505
- Ponty, Y., Gilbert, A. D., & Soward, A. M. 2001, in *Dynamo and Dynamics: A Mathematical Challenge*, ed. P. Chossat, D. Armbruster, & I. Oprea (Boston: Kluwer), 261
- Ponty, Y., Mininni, P. D., Montgomery, D. C., Pinton, J.-F., Politano, H., & Pouquet, A. 2005, *Phys. Rev. Lett.*, 94, 164502
- Pouquet, A., Frisch, U., & Léorat, J. 1976, *J. Fluid Mech.*, 77, 321
- Taylor, G. I., & Green, A. E. 1937, *Proc. R. Soc. London A*, 158, 499
- Schaeffer, N. 2004, Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier (Grenoble)
- Schekochihin, A. A., Cowley, S. C., Maron, J. L., & McWilliams, J. C. 2004, *Phys. Rev. Lett.*, 92, 054502
- Shan, X., & Montgomery, D. 1993a, *Plasma Phys. Controlled Fusion*, 35, 619
- . 1993b, *Plasma Phys. Controlled Fusion*, 35, 1019
- Verma, M. K. 2004, *Phys. Rep.*, 401, 229
- Yousef, T. A., Brandenburg, A., & Rüdiger, G. 2003, *A&A*, 411, 321

B.5 Bifurcation sous critique

B.5.1 Notes personnelles

Même si ce travail a commencé après une discussion à Lyon et les premiers calculs démarrés en France, ce projet a atteint un régime de croisière à Boulder durant la coupe du monde de Football de 2006, J-F Pinton et moi même, nous sommes restés en visite au NCAR, après une conférence sur la MHD. Tout d'abord, nous réalismes que nous étions en train de travailler sur le même problèmes en utilisant les mêmes outils en concurrence avec le groupe de Saclay. La concurrence est une stimulation saine pour la recherche. Mais dans ce cas précis, cela n'avait pas de sens, nous étions trop proches du groupe de François Daviaud. Après quelques échanges téléphoniques et tractations, la décisions de collaborer sur ce projet fût prise. L'objectif du projet était au début d'étudier la réponse non linéaire de l'induction magnétique juste avant le seuil et c'est finalement élargi après le seuil, pour découvrir des bifurcations sous-critiques. Je me rappellerais toujours sur la terrasse de la Maison des Séminaire à Nice quelque mois après Boulder, pendant un GDR Dynamo et Turbulent, ou nous réalismes l'existence de ces branches. C'est un moment magique où tout devient limpide et lumineux, qui représente le Graal du chercheur ou enfin il comprend en quelques minutes ou même en quelques secondes des mois de travail.

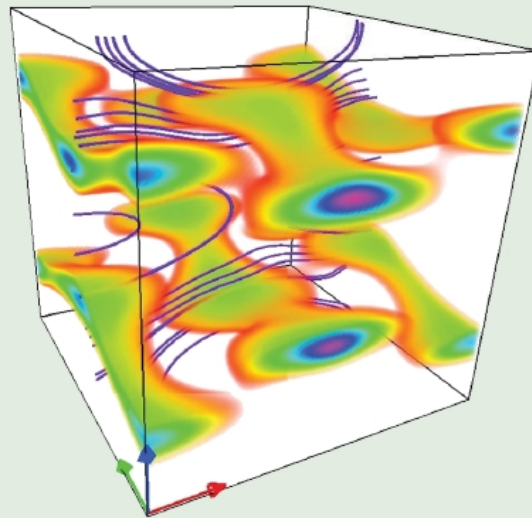
Pour revenir à Boulder, nous avions eu de nombreux bons moments : comme un excellent barbecue chez Annick Pouquet, le quart de final et la demie finale gagnée par l'équipe de France que nous avions visionnée dans un bar irlandais près de Pearl, une promenade bucolique dans les rocheuses avec Jean-François et l'inoubliable dégustation de sushi sur Pearl appelés curieusement (Orgasmics et double Orgasmics). Ce sont ces moments hors travail avec des collègues qui deviennent souvent des amis qui font la richesse de notre métier.

Pour finir en beauté avec tous ces bons moments, nous étions très fiers qu'une de nos images soit sélectionnée pour faire la couverture du numéro de notre article de Physical Review Letter. Comme je l'ai déjà dit dans l'annexe A.4.5, la belle visualisation c'est transformée en utile, avec cette couverture notre article a eu bien plus de visibilité.

PHYSICAL REVIEW LETTERS

Articles published week ending
30 NOVEMBER 2007

Volume 99, Number 22



Member Subscription Copy
Library or Other Institutional Use Prohibited Until 2012



Published by The American Physical Society

Subcritical Dynamo Bifurcation in the Taylor-Green Flow

Y. Ponty,¹ J.-P. Laval,² B. Dubrulle,³ F. Daviaud,³ and J.-F. Pinton⁴

¹Laboratoire Cassiopée, CNRS & Observatoire de la Côte d'Azur, Nice 06304, France

²Laboratoire de Mécanique de Lille, CNRS, Villeneuve d'Ascq 59665, France

³Service de Physique de l'Etat Condensé, CNRS & CEA Saclay, Gif-sur-Yvette 91191, France

⁴Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure de Lyon, CNRS & Université de Lyon, Lyon 69364, France

(Received 17 July 2007; published 29 November 2007)

We report direct numerical simulations of dynamo generation for flow generated using a Taylor-Green forcing. We find that the bifurcation is subcritical and show its bifurcation diagram. We connect the associated hysteretic behavior with hydrodynamics changes induced by the action of the Lorentz force. We show the geometry of the dynamo magnetic field and discuss how the dynamo transition can be induced when an external field is applied to the flow.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.99.224501

PACS numbers: 47.65.-d, 91.25.Cw

Larmor is generally credited for suggesting that the magnetic field of the Sun (and, by extension, of planets and other celestial bodies) is due to dynamo action—i.e., self-generation from the motions of an electrically conducting fluid [1]. This principle has received much theoretical support [1] since then and has recently been validated by experimental observations [2–5]. Dynamo action results from an instability. When the magnetic Reynolds number R_M (ratio of induction to Joule's damping) exceeds a critical value R_M^c , the null magnetic field state loses its stability to a non-zero-magnetic field state. Because of the low value of the magnetic Prandtl number (ratio of kinematic viscosity to magnetic diffusivity) of the fluids, this instability develops over a turbulent (noisy) base state and the choice of an order parameter can be ambiguous [6]. However, we can assume that some concepts of stability theory apply (cf. later) and study whether the transition is supercritical or subcritical [7]. In most models and in all experiments, it is supercritical: R_M^c is a unique number, albeit flow dependant. For instance, $R_M^c \sim 14$ and $R_M^c \sim 18$ for the constrained Karlsruhe and Riga experiments, while $R_M^c \sim 32$ for the fully turbulent von Kármán sodium (VKS) dynamo [4]. On the other hand, the dynamo bifurcation could also be subcritical because the action of a growing magnetic field may reduce hydrodynamic turbulence and maintain dynamo action for lower R_M values. In fact, the transition can be globally subcritical if the basic state is unstable with respect to finite amplitude perturbations [8]. A characteristic hysteretic behavior results, and the dynamo operates in a range of lower values $R_M^s < R_M < R_M^c$. Subcriticality has been discussed in MHD α - ω dynamical systems [9,10], for numerical simulations of convective dynamos in spherical geometries [11], and recently for Keplerian shear flows [12].

In this Letter, we study the dynamo bifurcation using full MHD simulations, generated in a 3D-periodical domain, by the Taylor-Green (TG) forcing [13]. At low Reynolds numbers, this flow has several metastable hydrodynamics states [14]. At higher Reynolds numbers, it has a well defined mean flow together with intense turbulent fluctua-

tions. Studies of the linear problem have shown that, while the dynamo threshold may run away in flows generated by random forcing [15], a dynamo is observed at all kinetic Reynolds numbers [16–18] in the Taylor-Green flow. We study here the fully nonlinear regime and report evidence of subcriticality in the bifurcation.

Using standard direct numerical simulation (DNS) procedures, we integrate pseudospectrally the MHD equations in a 2π -periodic box:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla \mathcal{P} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{F}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v} + \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (2)$$

together with $\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$; a constant mass density $\rho = 1$ is assumed. Here, \mathbf{v} stands for the velocity field, \mathbf{B} the magnetic field (in units of Alfvén velocity), $\mathbf{j} = (\nabla \times \mathbf{B})/\mu_0$ the current density, ν the kinematic viscosity, η the magnetic diffusivity, and \mathcal{P} is the pressure. The forcing term \mathbf{F} is given by the TG vortex

$$\mathbf{F}_{\text{TG}}(k_0) = 2f(t) \begin{bmatrix} \sin(k_0 x) \cos(k_0 y) \cos(k_0 z) \\ -\cos(k_0 x) \sin(k_0 y) \cos(k_0 z) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

implemented here at $k_0 = 1$. We shall consider two types of forcing: one in which $f(t)$ is set to a constant [$f(t) = 1.5$]; this is the constant force forcing considered in [16]. Another case corresponds to adjusting $2f(t)$ so that the (1, 1, 1) Fourier components of the velocity remains equal to the Taylor-Green vortex; this is the constant Taylor-Green vortex forcing considered in [17]. For the linear instability problem, both cases yield the same value of R_M^c [16,17]. In order to explore the nonlinear regime and study the response to finite amplitude perturbations, we note that three control parameters drive the instability: the magnetic and kinetic Reynolds numbers and the amplitude of an external magnetic field B_0 when applied. They are defined as

$$R_M = \frac{v_{\text{rms}}^0 \pi}{\eta} \quad R_V = \frac{v_{\text{rms}}^0 \pi}{\nu} \quad \Lambda = \frac{B_0}{v_{\text{rms}}^0}. \quad (4)$$

Here, π is the size of one TG cell when $k_0 = 1$; the characteristic speed v_{rms}^0 is computed from hydrodynamic runs in which the Navier-Stokes equation is not coupled to the induction equation, $v_{\text{rms}}^0 = \langle \sqrt{2E_V(t)} \rangle_t - E_V$ is net kinetic energy $E_V(t)$, and $\langle \cdot \rangle_t$ stands for averaging in time ($1/T \int^T dt$). Likewise, in dynamo runs, the intensity of the magnetic field is estimated from the net magnetic energy $E_M(t)$, as $b = \langle \sqrt{2E_M(t)} \rangle_t$.

Previous works [17,18] have explored the response of TG flows to infinitesimal magnetic perturbations, as a function of the kinetic Reynolds number R_V . It was found that at any R_V , there exists a critical R_M^c above which perturbations grow exponentially. This is illustrated in Fig. 1 for a run at $R_V = 563$ and $R_M = 281$ above the critical value $R_M^c = 206$. The initial magnetic field perturbation—with an energy level $E_M = 10^{-17}$ —first grows exponentially. At time $t \sim 300$, the magnetic field has reached sufficient amplitude so that it can react back onto the velocity field, saturate the instability, and reach a statistically stationary state, with approximate equipartition $E_M \sim E_V$. Times are given here in units of Eq. (1), for which 1 is very close to 1 eddy turnover time of the flow ($T_{\text{NL}} = \pi/v_{\text{rms}}^0 \sim 1.17$). This transition from infinitesimal perturbations builds the (solid) red curve in Fig. 2.

We have then quenched the system: at $t = 1000$, the magnetic diffusivity η is suddenly increased by a factor of 4, lowering R_M below R_M^c . After a short transient, both E_V and E_M decrease and reach a second statistically stationary

state, with a non zero-magnetic energy—a new dynamo state, for which equipartition is reached again (Fig. 1). This behavior is evidence of global subcriticality [8]. The different levels of fluctuations in the two regimes suggest the possibility of different dynamo states, depending on the magnetic field or on the history of the system. As subcritical bifurcations are also associated with hysteresis cycles, we have repeated the quenching procedure starting from the same dynamo state A (obtained at $t = 1000$ at $R_V = 563$ in Fig. 1) for increasing values of η , i.e., for decreasing R_M values. The (time-averaged) magnetic and kinetic energy obtained after rearrangements are then recorded, and results summarized in Fig. 2 by the curve in the $B_0 = 0$ plane. Starting from point A, one can sustain the dynamo after quenching through points A2 to A9, until a value R_M^g substantially lower than R_M^c (at A9, $R_M = 70$ compared to $R_M = 211$ in A3).

We have investigated further the system behavior along the cycle by monitoring the spatial structure of the magnetic and kinetic energy densities, so as to detect possible changes in the flow structure. In a first regime, until point A7, the kinetic energy (and hence v_{rms} , i.e., the turbulence intensity—see Table I) decreases and so does the magnetic energy—equipartition being essentially preserved. Past A8, changes occur: E_V starts to increase abruptly, while E_M continues to decrease, resulting in a decreasing ratio E_M/E_V —cf. later discussion and Fig. 4. Other global quantities are changing along this branch (see Table I). It corresponds to a modification in the spatial distribution of the magnetic energy. As seen in Fig. 3, the dynamo modes in A7 and A8 are different. At A7, the dynamo has a structure with magnetic energy “tubes” in which the field lines are concentrated along the diagonal direction (i.e., aligned with the energy structures). In A8, the dynamo has a

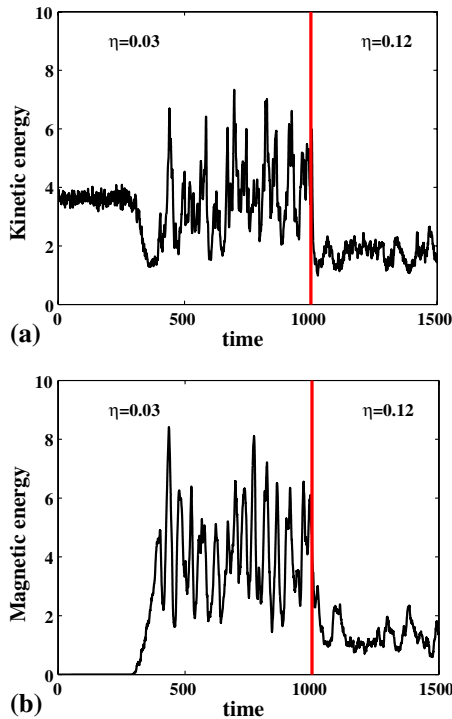


FIG. 1 (color online). After a dynamo is self-generated from infinitesimal perturbations, the induction equation is quenched at $t = 1000$ by a fourfold increase of the magnetic diffusivity. It corresponds to a sudden change from A to A₉—cf. Table I.

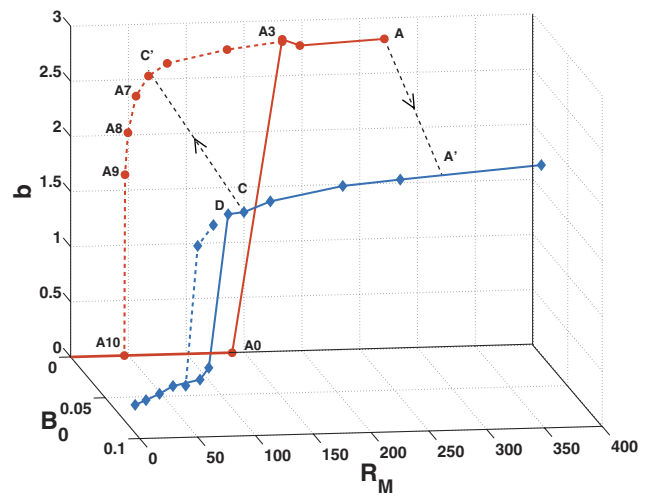


FIG. 2 (color). Bifurcation curves and hysteresis cycles when an external magnetic field is applied (full diamond symbols) or without one (full circle symbols). In this case, the subcritical quenched states (see text) form the red line. Jumps between the two branches link A to A' and C to C'.

TABLE I. The characteristics of each regime are : the root mean square amplitude of the magnetic and velocity fields $b = \langle \sqrt{2E_M(t)} \rangle_t$, $v_{\text{rms}} = \langle \sqrt{2E_V(t)} \rangle_t$, the integral length scales $L_B = \langle \sum E_B(k, t)/k \rangle_t$, $L_U = \langle \sum E_V(k, t)/k \rangle_t$ computed from the one-dimensional energy spectra $E(k, t)$.

Point	η	R_M	b	L_B	v_{rms}	L_U
A	0.03	281	2.8	5.2	2.7	3.0
A2	0.035	241	2.8	5.3	2.5	3.0
A3	0.04	211	2.8	5.4	2.5	2.9
A4	0.05	169	2.7	5.5	2.3	2.9
A5	0.07	121	2.6	5.7	2.0	2.9
A6	0.08	106	2.5	5.7	1.8	2.9
A7	0.09	94	2.4	5.7	1.7	2.9
A8	0.1	84	2.0	5.5	1.7	2.9
A9	0.12	70	1.6	5.1	1.9	3.0
A10	0.15	56	0.0	0.0	2.7	2.6

magnetic energy density with a wavy shape and the field lines are no longer parallel to the energy structures. In fact, the geometry of the A8 and A9 dynamo modes is reminiscent of the low kinematic mode of the TG dynamo [18].

As turbulence influences the dynamo, we have repeated the above sequence of quenching at varying kinetic

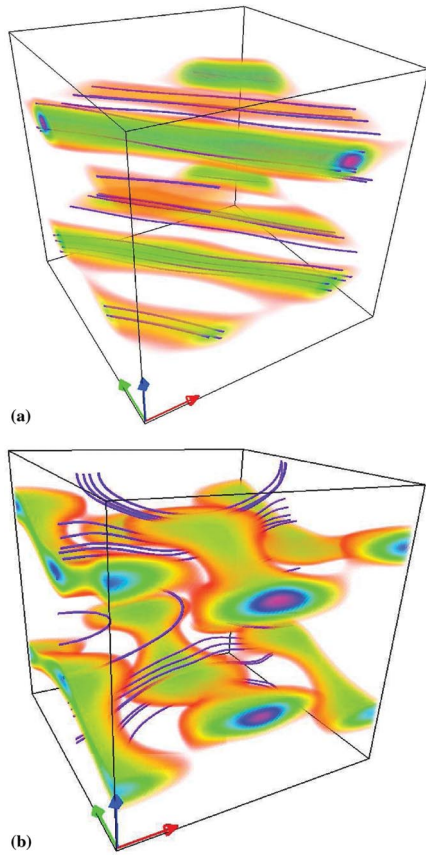


FIG. 3 (color). Volume rendering (75% of $\max(b)$) of the magnetic energy and magnetic field lines [27], for the normalized magnetic field $\langle B(\mathbf{x}, t)/B(t) \rangle$ averaged in time during the run; (a) point A7 and (b) point A8.

Reynolds numbers R_V . The result is shown in Fig. 4. We first observe that the hysteretic behavior persists as R_V is lowered. In addition, the hysteresis cycle width, $R_M^c - R_M^g$, decreases with R_V . It is interesting to compare their locations with respect to the dynamo windows evidenced in [17,18] for the Taylor-Green forcing. As shown in Fig. 4, R_M^g values are almost independent of R_V and lie close to the beginning of the first kinematic dynamo mode. The onset R_M^c switches from the kinematic low branch to the kinematic high branch as R_V increases (and turbulence develops) [17,18]. The width of the dynamo cycle is thus linked to the evolution of the $R_M^c(R_V)$ curve. The above results were obtained with a constant force scheme. We have repeated the quenching procedure for the constant Taylor-Green vortex case. As seen in Fig. 4 (black curve/diamonds symbols), the hysteretic behavior remains, but the transition towards the nondynamo state is more abrupt. Another difference concerns the response to quenching. With a constant velocity forcing, we reach a lower magnetic saturation level; when the velocity is kept constant, there may be less possibility for the Lorentz force to change the flow.

Finally, we have checked the influence of finite amplitude external perturbations on the hysteresis cycle by applying an external magnetic field of amplitude $B_0 = 0.07$ in the vertical direction. The result at $R_V = 563$ is shown by the blue line in Fig. 2. When comparing to the $B_0 = 0$ case (red curve), two effects are readily observed: (i) the hysteresis cycle is shortened due to a decrease in the onset R_M^c from infinitesimal perturbations; (ii) the amplitude of the magnetic energy in the dynamo is decreased, as lower b values are obtained. These observations are indications that the external magnetic field has mediated a transition towards another equilibrium state [14]. The tran-

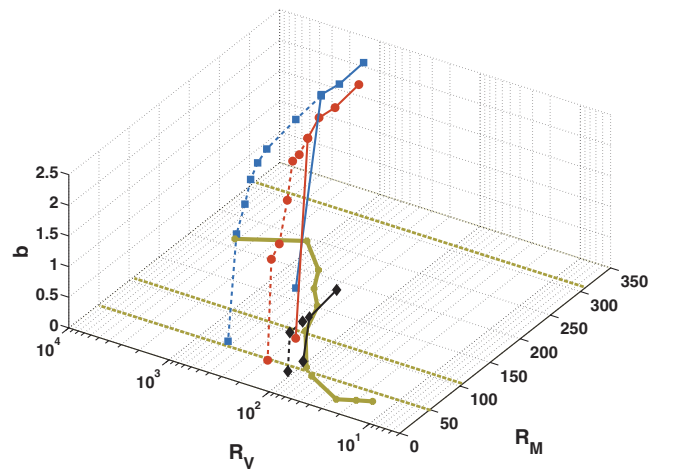


FIG. 4 (color). Hysteresis cycle for different Reynolds numbers and forcings—constant force (red, blue) and constant Taylor-Green vortex (black). The thick solid line in the $b = 0$ plane is the linear instability R_M^c vs R_V from dynamical runs; the kinematic dynamo windows [18], $R_M \in [50 \ 110]$ and $R_M > 320$, are delimited by the thick dotted lines.

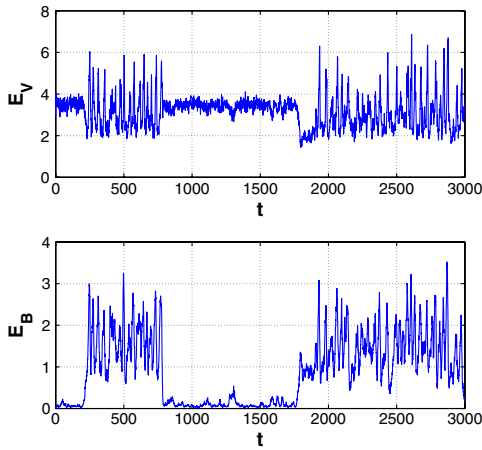


FIG. 5 (color online). Evolution on time of the kinetic (E_V) and magnetic energy (E_B) when the flow is operated in the immediate vicinity of point D —shown in Fig. 2.

sition towards this second equilibrium state is quite robust: one can also obtain it by switching on the vertical magnetic field starting from a state with a well-developed dynamo (jump from A to A' in Fig. 2). Conversely, starting from a dynamo state with an applied magnetic field and switching it off, one returns to the zero-magnetic field hysteresis curve (jump from C to C' in Fig. 2).

A less deterministic behavior is observed when the system is operated in the vicinity of point D —shown along the blue curve in Fig. 2. At this point, the system is operated at a magnetic Reynolds number slightly smaller than the linear threshold (93.8 compared to about 100) and one observes spontaneous switches between dynamo and nondynamo states, as shown in Fig. 5. This is reminiscent of the “on-off” bifurcation scenario sometimes proposed for the dynamo [19–22] at high R_V . It has been observed in models [23] and experimental [24] versions of the Bullard dynamo [25], and possibly in turbulent fluid dynamos [5]. We note in Fig. 5 that the kinetic energy has stronger fluctuations during the dynamo periods.

To summarize, we have evidenced in the TG flow several features characteristic of subcriticality of the dynamo instability. At variance with typical dynamical systems, this behavior is obtained in a fully turbulent system, where fluctuations are of the same order of magnitude as the mean flow. We may remark that in this case, the traditional concept of amplitude equation may be ill-defined and one may have to generalize the notion of “subcritical transition” for turbulent flows. Another feature is the sensitivity to perturbations of the order parameter through the application of an external magnetic field. The perturbation mainly acts through macroscopic changes in the system configuration (perturbation of the velocity field), allowing lower thresholds for dynamo instability. These findings open new perspective for experimental dynamos. For the TG flow, we observe a decrease of the dynamo threshold by as much as 57%, with an external applied field of $B_0 = 0.07$. We have also found that changes in the geometry of

the dynamo states in the subcritical branch are consistent with the coexistence of several metastable hydrodynamics states [14]. Preliminary observations in the VKS experiment also point to the existence of subcritical dynamos in the presence of global rotation [26], a feature also noted in some numerical models of the geodynamo [11].

We acknowledge useful discussions with A. Pouquet and P. Mininni, R. Jover, and team members of the VKS collaboration. Computer time was provided by IDRIS and SIGAMM at Observatoire de la Côte d’Azur. This work is supported by the French GDR Dynamo. Y.P. thanks A. Miniussi for computing design assistance.

- [1] H. K. Moffatt, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids* (Cambridge U. Press, Cambridge, England, 1978).
- [2] A. Gailitis *et al.*, Phys. Rev. Lett. **86**, 3024 (2001).
- [3] R. Stieglitz and U. Müller, Phys. Fluids **13**, 561 (2001).
- [4] R. Monchaux *et al.*, Phys. Rev. Lett. **98**, 044502 (2007).
- [5] M. Berhanu *et al.*, Europhys. Lett. **77**, 59001 (2007).
- [6] VKS team (private communication); M. Berhanu *et al.*, “Bistability between stationary and oscillating dynamos in the VKS experiment,” report 2007 (unpublished).
- [7] P. Manneville, *Dissipative Structures and Weak Turbulence* (Academic Press, Boston, 1990).
- [8] O. Dauchot and P. Manneville, J. Phys. II **7**, 371 (1997).
- [9] K. A. Robbins, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **73**, 4297 (1976).
- [10] S. Fedotov, I. Bashkirtseva, and L. Ryashko, Phys. Rev. E **73**, 066307 (2006).
- [11] V. Morin, Ph.D. Thesis, University Paris VI, 1999; U. R. Christensen, P. Olson, and G. A. Glatzmaier, Geophys. J. Int. **138**, 393 (1999).
- [12] F. Rincon, G. I. Ogilve, and M. R. E. Proctor, Phys. Rev. Lett. **98**, 254502 (2007).
- [13] M. Brachet, Fluid Dyn. Res. **8**, 1 (1991); C. Nore *et al.*, Phys. Plasmas **4**, 1 (1997).
- [14] B. Dubrulle *et al.*, New J. Phys. **9**, 308 (2007).
- [15] A. A. Schekochihin *et al.*, New J. Phys. **4**, 84 (2002); A. A. Schekochihin *et al.*, Phys. Rev. Lett. **92**, 054502 (2004); A. B. Iskakov *et al.*, Phys. Rev. Lett. **98**, 208501 (2007).
- [16] Y. Ponty *et al.*, Phys. Rev. Lett. **94**, 164502 (2005).
- [17] J.-P. Laval *et al.*, Phys. Rev. Lett. **96**, 204503 (2006).
- [18] Y. Ponty *et al.*, New J. Phys. **9**, 296 (2007).
- [19] S. Lozhkin, D. Sokoloff, and P. Frick, Astronomy Reports **43**, 753 (1999).
- [20] D. Sweet *et al.*, Phys. Rev. E **63**, 066211 (2001).
- [21] N. Leprovost and B. Dubrulle, Eur. Phys. J. B **44**, 395 (2005).
- [22] M. D. Nornberg *et al.*, Phys. Rev. Lett. **97**, 044503 (2006).
- [23] N. Leprovost, B. Dubrulle, and F. Plunian, Magneto-hydrodynamics **42**, 131 (2006).
- [24] M. Bourgoïn *et al.*, New J. Phys. **8**, 329 (2006).
- [25] E. C. Bullard, Proc. Cambridge Philos. Soc. **51**, 744 (1955).
- [26] VKS team (private communication); M. Berhanu *et al.*, Bistability between a stationary and an oscillatory dynamo in a turbulent flow of liquid sodium, report, 2007 (to be published).
- [27] Imagery using VAPOR code (www.vapor.ucar.edu).

B.6 Dynamo intermittentes

B.6.1 Notes personnelles

Notre équipe a eu la chance d'avoir une bourse post-doctorale Poincaré en 2007-2008. Alexandros Alexakis venait de finir un post-doc à Boulder dans l'équipe de d'Annick Pouquet. Il est resté un an et il a été très productif. Il a continué et fini des travaux avec Pablo et Annick, a aussi travailler avec Hélène. Ensemble, nous cherchions des écoulements qui pourraient produire une dynamo comportant des bifurcations sous-critiques comme pour le Taylor-Green, mais nous n'avons pas eu de succès. Mais en faisant, cette étude nous avons utilisé le forçage de l'ABC et nous nous sommes rendu compte des propriétés étonnantes de dynamo intermittente du forçage de l'ABC près du seuil, qui avaient été mises en évidences par [Sweet 2001b, Sweet 2001a]. Nous avons décidé d'étendre ce travail et de regarder l'effet de la force de Lorentz sur l'amplitude des fluctuations. Avec Alex, nous avons eu de très bon moment dans la cuisine du PHC, en dégustant des «cafés frappés» préparés à la façon crétoise. Après avoir effectué son service militaire en Grèce, il est revenu en France travailler avec François Pétrilis au Laboratoire de Physique Statistique à l'ENS Paris, et il a obtenu un poste au CNRS en 2010, c'est à mon avis une excellente recrue pour notre institut.

Effect of the Lorentz force on on-off dynamo intermittency

Alexandros Alexakis and Yannick Ponty

Université de Nice Sophia-Antipolis, France (UNS),

Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS),

and Observatoire de la Côte d'Azur, Boîte Postale 4229, Nice Cedex 04, France

(Received 28 September 2007; published 14 May 2008)

An investigation of the dynamo instability close to the threshold produced by an *ABC* forced flow is presented. We focus on the on-off intermittency behavior of the dynamo and the countereffect of the Lorentz force in the nonlinear stage of the dynamo. The Lorentz force drastically alters the statistics of the turbulent fluctuations of the flow and reduces their amplitude. As a result, much longer bursts (on phases) are observed than is expected based on the amplitude of the fluctuations in the kinematic regime of the dynamo. For large Reynolds numbers, the duration time of the on phase follows a power law distribution, while for smaller Reynolds numbers the Lorentz force completely kills the noise and the system transits from a chaotic state into a laminar time periodic flow. The behavior of the on-off intermittency as the Reynolds number is increased is also examined. The connections with dynamo experiments and theoretical modeling are discussed.

DOI: [10.1103/PhysRevE.77.056308](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.77.056308)

PACS number(s): 47.65.-d, 47.20.Ky, 47.27.Sd, 52.65.Kj

I. INTRODUCTION

Dynamo action, the self-amplification of a magnetic field due to the stretching of magnetic field lines by a flow, is considered to be the main mechanism for the generation of magnetic fields in the universe [1]. In that respect many experimental groups have successfully attempted to reproduce dynamos in liquid sodium laboratory experiments [2–8]. The induction experiments [9–18] studying the response of an applied magnetic field inside a turbulent metal liquid also represent challenging science. With or without dynamo instability, the flow of a conducting fluid forms a complex system, with a large number of degrees of freedom and a wide range of nonlinear behaviors.

In this work we focus on one special behavior: the on-off intermittency or blowout bifurcation [19,20]. On-off intermittency is present in chaotic dynamical systems for which there is an unstable invariant manifold in the phase space such that the unstable solutions have a growth rate that varies strongly in time, taking both positive and negative values. If the averaged growth rate is sufficiently smaller than the fluctuations of the instantaneous growth rate, then the solution can exhibit on-off intermittency where bursts of the amplitude of the distance from the invariant manifold are observed (when the growth rate is positive) followed by a decrease of the amplitude (when the growth rate is negative). (See [21,22] for a more precise definition.)

On-off intermittency has been observed in different physical experiments including electronic devices, electrohydrodynamic convection in nematics, gas discharge plasmas, and spin-wave instabilities [23]. In the magnetohydrodynamics (MHD) context, near the dynamo instability onset, the on-off intermittency has been investigated by modeling of the Bullard dynamo [24]. Using direct numerical simulation [21,22], they were able to observe on-off intermittency solving the full MHD equations for the *ABC* dynamo (here we present an extended study of this particular case). on-off intermittency has also been found recently for a Taylor-Green flow [25]. Finally, recent liquid metal experimental results [26]

show some intermittent behavior, with features reminiscent of on-off self-generation that motivated our study.

For the MHD system we are investigating the evolution of the magnetic energy $E_b = \frac{1}{2} \int \mathbf{b}^2 dx^3$ which is given by $\partial_t E_b = \int \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \eta (\nabla \times \mathbf{b})^2 dx^3$, where \mathbf{b} is the magnetic field and \mathbf{u} is the velocity field. If the velocity field has a chaotic behavior in time the right-hand side of the equation above can take positive or negative values and can be modeled as multiplicative noise. A simple way is to model the behavior of the magnetic field during the on-off intermittency using a stochastic differential equation (SDE) [19,20,27–35]:

$$\partial_t E_b = (a + \xi) E_b - Y_{\text{NL}}(E_b), \quad (1)$$

where E_b is the magnetic energy, a is the long-time-averaged growth rate, and ξ models the noise term typically assumed to be white (see, however, [34,35]) and of amplitude D such that $\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = 2D \delta(t-t')$. Y_{NL} is a nonlinear term that guarantees the saturation of the magnetic energy to finite values typically taken to be $Y_{\text{NL}}(X) = X^3$ for investigations of supercritical bifurcations or $Y_{\text{NL}}(X) = X^5 - X^3$ for investigations of subcritical bifurcations. Alternative, an upper no-flux boundary is imposed at $E_b = 1$. In all these cases (independent of the nonlinear saturation mechanism) the above SDE leads to a stationary distribution function that for $0 < a < D$ has a singular behavior at $E_b = 0$: $P(E_b) \sim E_b^{a/D-1}$, indicating that the systems spends a lot of time in the neighborhood of $E_b = 0$. This singularity is the signature of on-off intermittency. Among other predictions of the SDE model, here we note that the distribution of the duration time of the off phases follows a power law behavior $f_{\text{PDF}}(\Delta T_{\text{off}}) \sim \Delta T_{\text{off}}^{-1.5}$, all moments of the magnetic energy follow a linear scaling with a , $\langle E_b^m \rangle \sim a$, and for $a=0$ the set of bursts has a fractal dimension $d=1/2$ [30–33].

In this dynamical system Eq. (1), however, the noise amplitude and the noise properties do not depend on the amplitude of the magnetic energy. However, in the MHD system, when the nonlinear regime is reached, the Lorentz force has

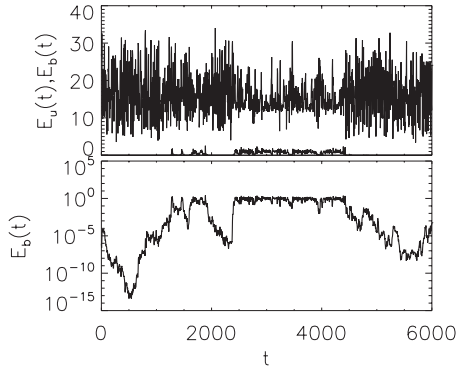


FIG. 1. A typical example of a burst. The top panel shows the evolution of the kinetic energy (top line) and magnetic energy (bottom line). The bottom panel shows the evolution of the magnetic energy in a log-linear plot. During the on phase of the dynamo the amplitude of the noise of the kinetic energy fluctuations is significantly reduced. The runs were for the parameters $Gr=39.06$ and $G_M=50.40$.

clear effects on the flow, such as the decrease of the small-scale fluctuation, and the decrease of the local Lyapunov exponent [36,37]. In some cases, the flow is altered so strongly that the MHD dynamo system jumps into another attractor, which can no longer sustain the dynamo instability [38]. Although the exact mechanism of the saturation of the MHD dynamo is still an open question that might not have a universal answer, it is clear that both the large scales and the turbulent fluctuations are altered in the nonlinear regime and need to be taken into account in a model.

Figure 1 demonstrates this point, by showing the evolution of the kinetic and magnetic energy as the dynamo goes through on and off phases. During the on phases, although the magnetic field energy is an order of magnitude smaller than the kinetic energy, both the mean value and the amplitude of the observed fluctuations of the kinetic energy are significantly reduced. As a result the on phases last a lot longer than the SDE model would predict. With our numerical simulations, we aim to describe which of the on-off intermittency properties are affected through the Lorentz force feedback.

This paper is structured as follows. In Sec. II we discuss the numerical method used. In Sec. III A we present a table of our numerical runs and discuss the dynamo onset. Results for small Reynolds numbers showing the transition from a laminar dynamo to on-off intermittency are presented in Sec. III B, and the results on fully developed on-off intermittency behavior are given in Sec. III C. Conclusions, and implications for modeling and for laboratory experiments are given in the last section.

II. NUMERICAL METHOD

Our investigation is based on the numerical integration of the classical incompressible magnetohydrodynamic equations (2) in a full three-dimensional periodic box of size 2π , with a parallel pseudospectral code. The MHD equations are

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla P + (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f},$$

$$\partial_t \mathbf{b} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{u} + \eta \nabla^2 \mathbf{b}, \quad (2)$$

along with the divergence-free constraints $\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{b} = 0$, where \mathbf{u} is the velocity, \mathbf{b} is the magnetic field (in units of the Alfvén velocity), ν is the molecular viscosity, and η is the magnetic diffusivity. \mathbf{f} is an externally applied force that in the current investigation is chosen to be the ABC forcing [39] explicitly given by

$$\mathbf{f} = \{\hat{x}[A \sin(k_z z) + C \cos(k_y y)], \hat{y}[B \sin(k_x x) + A \cos(k_z z)], \hat{z}[C \sin(k_y y) + B \cos(k_x x)]\}, \quad (3)$$

with all the free parameters chosen to be 1: $A=B=C=k_x=k_y=k_z=1$.

The MHD equations have two independent control parameters that are generally chosen to be the kinetic and magnetic Reynolds numbers defined by: $Re=UL/\nu$ and $R_M=UL/\eta$, respectively, where U is chosen to be the root mean square of the velocity (defined by $U=\sqrt{2E_u/3}$, where E_u is the total kinetic energy of the velocity) and L is the typical large scale here taken as $L=1.0$. Alternatively, we can use the amplitude of the forcing to parametrize our system, in which case we obtain the kinetic and magnetic Grashof numbers $Gr=FL^3/\nu^2$ and $G_M=FL^3/\nu\eta$, respectively. Here F is the amplitude of the force, which is taken to be unity $F=\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}/3=1$ following the notation of [53].

We note that in the laminar limit the two different sets of control parameters are identical, $Gr=Re$ and $G_M=R_M$, but in the turbulent regime (where the forcing is balanced by the nonlinear term $F \sim U^2/L$) the scaling $Gr \sim Re^2$ and $G_M \sim ReR_M$ is expected. In the examined parameter range the velocity field fluctuates in time, generating uncertainties in the estimation of the root mean square of the velocity, and thus the Reynolds numbers as well. For this reason, in this work we are going to use the Grashof numbers as the control parameters of our system. Even though this forcing parameter is not necessarily linear with the Reynolds number, to simplify the discussion, we will use in the following text the term ‘‘Reynolds numbers’’ instead of ‘‘Grashof numbers,’’ keeping the Grashof number symbols.

Starting with a statistically saturated velocity, we investigate the behavior of the kinetic and magnetic energy in time by introducing a small magnetic seed at $t=0$ and letting the system evolve. When the magnetic Reynolds (Reynolds) number is sufficiently large, the magnetic energy grows exponentially in time, reaching the dynamo instability. We have computed the dynamo onset for different kinematic Reynolds numbers (Sec. III A) starting from small $Gr=11.11$, for which the flow exhibits laminar ABC behavior, to larger values of Gr (up to $Gr=625.0$) that the flow is relatively turbulent.

Typical durations of the runs were 10^5 turnover times although in some cases even much longer integration time was used. For each run during the kinematic stage of the dynamo the finite-time growth rate $a_\tau(t) = \tau^{-1} \ln[E_b(t+\tau)/E_b(t)]$ was measured. The long-time-averaged growth rate was then determined as $a = \lim_{\tau \rightarrow \infty} a_\tau(0)$ and the amplitude of the noise D was measured based on $D = \tau((a - a_\tau)^2)/2$ (see [21,22]). A typical value of τ was 100 while for long-time averages the

TABLE I. Parameters used in the simulations. G_{Mc} is the critical magnetic Reynolds number where the dynamo instability begins and G_{Mo} is the critical magnetic Reynolds number where the dynamo instability stops having on-off behavior. Thus, on-off intermittency is observed in the range $G_{Mc} < G_M < G_{Mo}$.

Run	ν	Gr	Re	G_{Mc}	G_{Mo}
I	0.30	11.11	11.11	8.89–17.8, 24.0	8.89
II	0.28	12.75	12.75/11.22	8.50	8.50
III	0.25	16.00	14.82	9.35	9.35
IV	0.22	20.66	16.92	11.3	11.8
VI	0.20	25.00	18.45	29.4	56.8
VII	0.18	30.86	19.47	37.0	50.5
VII	0.16	39.06	20.60	48.0	59.5
VII	0.08	156.25	34.08	123.7	137.
VII	0.04	625.00	67.20	327.2	362.

typical averaging time ranged from 10^4 to 10^5 depending on the run. The need for long computational time in order to obtain good statistics restricted our simulations to low resolutions that varied from 32^3 (for $Gr \leq 40.0$) to 64^3 (for $Gr > 40$).

III. NUMERICAL RESULTS

A. Dynamo onset

The *ABC* flow is a strongly helical Beltrami flow with chaotic Lagrangian trajectories [40]. The kinematic dynamo instability of the *ABC* flow, even with one of the amplitude coefficients set to zero ($2^{1/2}D$ flow) [41,42] has been studied intensively [43–47], especially for fast dynamo investigation [48–52]. In the laminar regime and for the examined case where all the parameters of the *ABC* flow are equal to unity [Eqs. (4)], the flow is a dynamo in the range $8.9 \lesssim G_M \lesssim 17.8$ and for $24.8 < G_M$ [43,44]. In this range the magnetic field is growing near the stagnation point of the flow, producing cigar-shaped structures aligned along the unstable manifold.

As the kinematic Reynolds number is increased, a critical value is reached ($Gr = Re \sim 13$) where the hydrodynamic system becomes unstable. After the first bifurcation, further increase of the kinematic Reynolds number leads the system to jump to different attractors [53–56], until finally the fully turbulent regime is reached.

The on-off intermittency dynamo has been studied with the *ABC* forcing by [21,22]. These studies were focused on a single value of the Reynolds number while the magnetic Reynolds number was varied. We expand this work by varying both parameters. For each kinematic Reynolds number, a set of numerical runs were performed varying the magnetic Reynolds number. The different Reynolds numbers examined are shown in Table I. The case examined in [21,22] is closest to the set of runs with $Gr = 39.06$ although here examined at higher resolution.

First, we discuss the dynamo onset. For each kinetic Reynolds number the critical magnetic Reynolds number G_{Mc} is

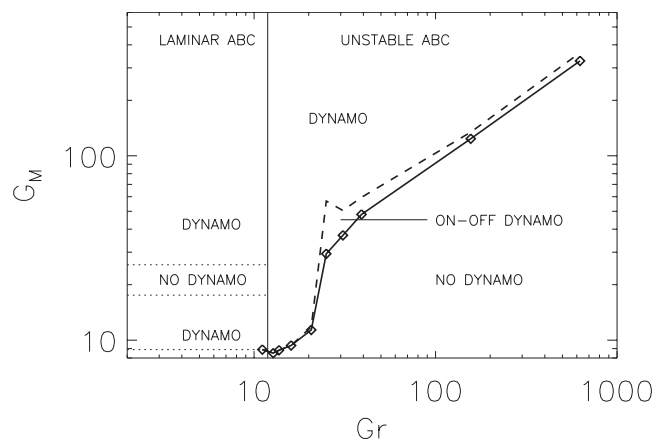


FIG. 2. Critical magnetic Reynolds number G_{Mc} above which the dynamo instability is observed (solid line) and the critical magnetic Reynolds number G_{Mo} where the on-off intermittency disappears (dashed line).

found and recorded in Table I. For our lowest kinematic Reynolds number $Gr = 11.11$, which corresponds to a slightly smaller value than the critical value for the presence of hydrodynamic instabilities, the flow is laminar and the two windows of dynamo instability [43,44] are rediscovered, as shown in Fig. 2. At higher Reynolds number, the hydrodynamic system is no longer stable, and the two windows of dynamo modes disappear, collapsing to only one (see Fig. 2). There is certainly some symmetry breaking effect in this merging [56]. The critical magnetic Reynolds number is increasing with the Reynolds number Fig. 2, and saturates at very large values of Gr [57] that are far beyond the range examined in this work.

B. Route to on-off intermittency

The first examined Reynolds number beyond the laminar regime is $Gr = 12.75$ (run II). In this case two stable solutions of the Navier-Stokes equations coexist. Depending on the initial condition, this hydrodynamic system converges into one of the two attractors. The two velocity fields have different critical magnetic Reynolds numbers. The first solution is the laminar flow, which shares the same dynamo properties as the smaller Reynolds number flows. For the second flow, however, the previous stable window between $G_M \approx 17.8$ and 24.0 disappears and the critical magnetic Reynolds number now becomes $G_{Mc} = 8.50$, resulting in only one instability window. Figure 3 demonstrates the different dynamo properties of the two solutions. The evolution of the kinetic and magnetic energy of two runs is shown with the same parameters Gr, G_M but with different initial conditions for the velocity field. G_M is chosen in the range of the no-dynamo window of the laminar *ABC* flow.

This choice of Gr , although it exhibits interesting behavior, does not give on-off intermittency since both hydrodynamic solutions are stable in time. The next examined Reynolds number (III) gives a chaotic behavior of the hydrodynamic flow and accordingly a “noisy” exponential growth rate for the magnetic field.

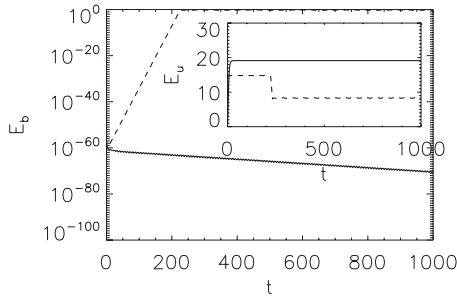


FIG. 3. Kinetic (inset) and magnetic energy for the run with $Gr=12.75$ and $G_M=22.32$ for two runs starting with different initial conditions for the velocity field. The first flow (solid line) is attracted to the laminar ABC flow and gives no dynamo. The second flow (dashed line) is attracted to a new solution that gives a dynamo.

The evolution of the kinetic and magnetic energy in the kinematic regime is shown in Fig. 4 for a relatively short time interval. The kinetic energy “jumps” between the values of the kinetic energy of the two states that were observed to be stable at smaller Reynolds numbers in a chaotic manner. Accordingly, the magnetic energy grows or decays depending on the state of the hydrodynamic flow, in a way that very much resembles a biased random walk in the log-linear plane. Thus, this flow is expected to be a good candidate for on-off intermittency that could be modeled by the SDE model equations given in Eq. (1). However, this flow did not result in on-off intermittency for all examined magnetic Reynolds numbers, even for the runs where the measured growth rate and amplitude of the noise were found to satisfy the criterion $a/D < 1$ for the existence of on-off intermittency. What is found instead is that at the linear stage the magnetic field grows in a random way but in the nonlinear stage the solution is trapped in a stable periodic solution and remains there throughout the integration time. This behavior is demonstrated in Fig. 5, where the evolution of the magnetic energy is shown both in the linear and in the nonlinear regime.

Another interesting feature of this case is subcriticality [25]. The periodic solution that the dynamo simulations converged to in the nonlinear stage appears to be stable even for the range of G_M where no dynamo exists. Figure 6 shows the time evolution of two runs with the same parameters Gr, G_M ,

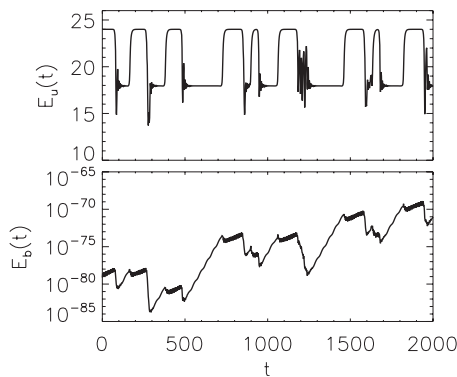


FIG. 4. Evolution of the kinetic (top panel) and magnetic (bottom panel) energy for the run with $Gr=16.0$ and $G_M=9.39$.

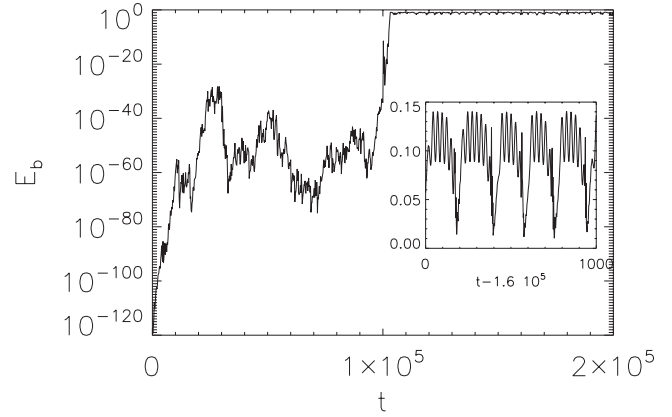


FIG. 5. Evolution of the magnetic energy for the run with $Gr=16.0$ and $G_M=9.39$. At the linear stage the logarithm of the magnetic energy grows as a random walk. At the nonlinear stage, however, the solution is trapped in a stable time-periodic solution. The inset shows the evolution of the magnetic energy in the nonlinear stage in a much shorter time interval. The examined run has $a/D=0.022 < 1$.

one starting with very small amplitude of the magnetic field and one starting using the output from one of the successful dynamo runs in the nonlinear stage. Although the magnetic energy of the first run decays with time, the nonlinear solution appears to be stable.

The next examined Reynolds number $G=20.66$ (IV) appears to be a transitory state between the previous example and the on-off intermittency that is examined in the next section. Figure 7 shows the evolution of the magnetic energy for three different values of $G_M=20.66, 12.0, 11.6$ for all of which the ratio a/D was measured and was found to be smaller than unity, and therefore they are expected to give on-off intermittency based on the SDE model. Only the bottom panel, however (which corresponds to the value of $G_M=11.6$ closest to the onset value $G_M=11.3$), shows on-off intermittency. A singular power law behavior of the probability distribution function (PDF) of the magnetic energy during the off phases (small E_b) for the last run was observed to be in good agreement with the predictions of the SDE. This is expected, since for small E_b the Lorentz force that is responsible for trapping the solution in the nonlinear stage does not play any role.

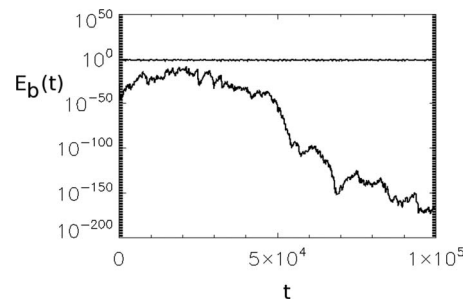


FIG. 6. Subcritical behavior of the ABC dynamo. The evolution of the magnetic energy for two runs with $Gr=16.0$ and $G_M=9.30$, starting with a small-amplitude magnetic field (bottom line) and starting with an amplitude of the magnetic field at the nonlinear stage (top, almost horizontal, line).

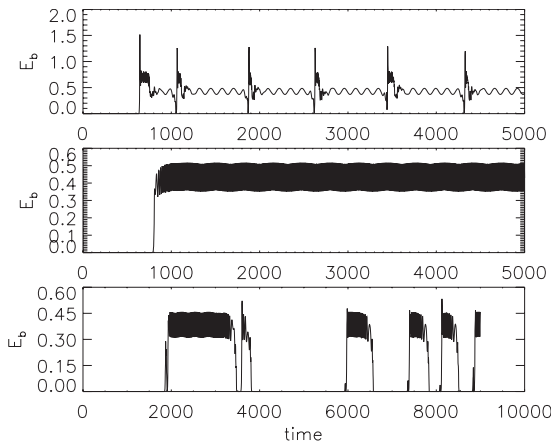


FIG. 7. Evolution of the magnetic energy for $Gr=20.66$ and $G_M=20.66$ (top panel), 12.0 (middle panel), and 11.6 (bottom panel).

C. On-off intermittency

All the larger Reynolds numbers examined display on-off intermittency and there is no trapping of the solutions in the on phase. Figure 8 shows an example of the on-off behavior for $Gr=25.0$ and three different values of G_M [$G_M=41.6$ (top panel), 35.7 (middle panel), and 31.2 (bottom panel)].

As the critical value of G_M is approached, the on phases of the dynamo (bursts) become more and more rare, as the SDE model predicts. Note, however, that the on phases of the dynamo last considerably longer. In fact, the distribution of the durations of the on phase ΔT_{on} is fitted best to a power law distribution rather than the exponential that a random walk model with an upper no-flux boundary would predict, as can be seen in Fig. 9.

The effect of the long duration of the on times can also be seen in the PDFs of the magnetic energy. The PDFs for $Gr=25$ for the examined G_M are shown in Fig. 10. For values of G_M much larger than the critical value G_{Mc} , the PDF of the amplitude of the magnetic field is concentrated at large values $E_b \approx 1$, producing a peak in the PDF curves. As G_M is decreased, approaching G_{Mc} from above, a singular behavior of the PDF appears with the PDF having a power law behav-

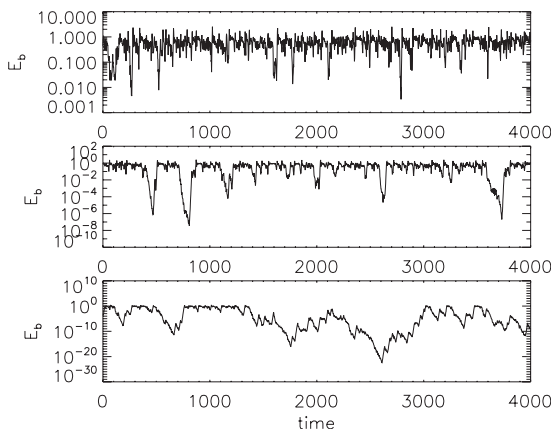


FIG. 8. Evolution of the magnetic energy for $Gr=25$ and $G_M=41.6$ (top panel), 35.7 (middle panel), and 31.2 (bottom panel).

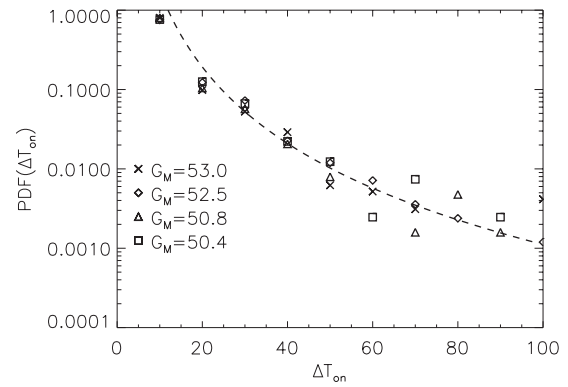


FIG. 9. Distribution of the on times for the $Gr=39.06$ case and three different values of G_M . The fit (dashed line) corresponds to the power law behavior $\Delta T^{-3.2}$. Here, the on time is considered to be the time that the dynamo has magnetic energy $E_b > 0.2$.

ior $\sim E_b^{-\gamma}$ for small E_b . The closer the G_M is to the critical value, the stronger the singularity. The dashed lines show the prediction of the SDE model $\gamma=1-a/D$. The fit is very good for small E_b ; however, the SDE for a supercritical bifurcation fails to reproduce the peak of the PDF at large E_b due to the long duration of the on phases.

Another prediction of the SDE model is that all the moments of the magnetic energy $\langle E_b^n \rangle = \int f_{PDF}(E_b) E_b^n dE_b$ have a linear scaling with the deviation of G_M from the critical value G_{Mc} provided that the difference $G_M - G_{Mc}$ is sufficiently small. This result is based on the assumption that the singular behavior close to $E_b=0$ gives the dominant contribution to the PDF, which is always true provided that the ratio a/D is sufficiently small. However, if the system spends long times in the on phase, the range of validity of the linear scaling of $\langle E_b \rangle$ with $a \sim G_M - G_{Mc}$ is restricted to very small values of the difference $G_M - G_{Mc}$. Figure 11 shows the time-averaged magnetic energy $\langle E_b \rangle$ as a function of the relative difference $(G_M - G_{Mc})/G_M$ in a log-log scale. The dependence of $\langle E_b \rangle$ on the deviation of G_M from the critical value appears to approach the linear scaling, albeit very slowly. The best fit from the six smallest values of G_M shown in Fig. 11 gave an exponent of 0.8 [e.g.,

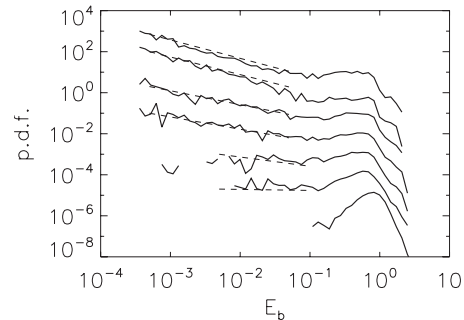


FIG. 10. Probability distribution functions of E_b , for $Gr=25$ and seven different values of G_M (starting from the top line, $G_M=31.2$, 33.3 , 35.7 , 38.4 , 41.6 , 50.0 , and 83.3). The last case $G_M=83.3$ shows no on-off intermittency. The dashed lines show the prediction of the SDE model. The PDFs have not been normalized for reasons of clarity.

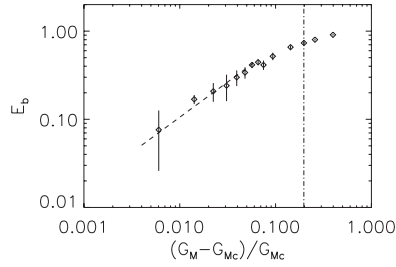


FIG. 11. Averaged magnetic energy as a function of the relative deviation from the critical magnetic Reynolds number. The dash-dotted vertical line indicates the location of $(G_{Mo} - G_{Mc})/G_{Mc}$, beyond which on-off intermittency is no longer present.

$\langle E_b \rangle \sim (G_M - G_{Mc})^{0.8}$. The small difference from the linear scaling [$\langle E_b \rangle \sim (G_M - G_{Mc})^1$] is probably because not sufficiently small deviations $(G_M - G_{Mc})$ were examined. We note, however, that there is a strong deviation from the linear scaling for values of G_M close to G_{Mo} .

Of particular interest to the experiments is how the range of intermittency changes as Gr is increased. Typical Gr numbers for the experiments are of the order of $Gr \sim Re^2 \sim 10^{12}$ which it is not currently possible to obtain in numerical simulations. In Fig. 2 we showed the critical magnetic Reynolds number G_{Mc} for which dynamo instability is observed and the critical magnetic Reynolds number G_{Mo} where the on-off intermittency is present. G_{Mc} was estimated by interpolation between the run with the smallest positive growth rate and the run with the smallest (in absolute value) negative growth rate. The on-off intermittency range was based on the PDFs of the magnetic energy. Runs for which the PDF had singular behavior at $E_b \approx 0$ are considered on-off while runs with smooth behavior at $E_b \approx 0$ are not considered to show on-off intermittency. The slopes of the PDFs (in log-log scale) for small E_b were calculated and the transition point G_{Mo} was determined by interpolation of the two slopes (see, for example, the bottom two curves in Fig. 10). In Fig. 12 we show the ratio $(G_{Mo} - G_{Mc})/G_{Mc}$ as a function of Gr , which expresses the relative range where on-off intermittency is observed. The error bars correspond to the smallest examined values of G_M where no on-off intermittency was observed (upper error bar) and the largest ex-

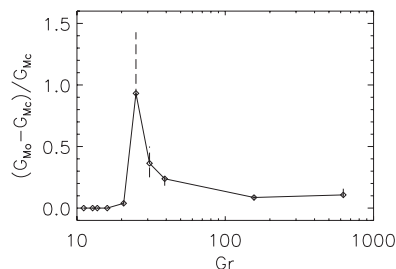


FIG. 12. The ratio $(G_{Mo} - G_{Mc})/G_{Mc}$ as a function of Gr that expresses the relative range for which on-off intermittency is observed. The upper limits of the error bars (dashed line) correspond to the smallest examined values of G_M for which no on-off intermittency was observed, and the lower limits of the error bars correspond to the largest examined values of G_M for which on-off intermittency was observed.

amined values of G_M where on-off intermittency was observed (lower error bar). The range of on-off intermittency is decreasing as Gr is increased, probably reaching an asymptotic value. However, to clearly determine the asymptotic behavior of G_{Mo} with Gr would require higher resolution, which the long duration of these runs does not allow us to obtain.

IV. DISCUSSION

In this work we have examined how the on-off intermittency behavior of a dynamo near criticality is changed as the kinematic Reynolds number is varied, and the effect of the Lorentz force in the nonlinear stage of the dynamo. The predictions of [30–33], linear scaling of the averaged magnetic energy with the deviation of the control parameter from its critical value, fractal dimensions of the bursts, distribution of the off time intervals, and singular behavior of the PDF of the magnetic energy, which were tested numerically in [21,22], were verified for a larger range of kinematic Reynolds numbers when on-off intermittency was present. Note, however, that all these predictions are based on the statistics of the flow in the kinematic stage of the dynamo. However, it was found that the Lorentz force can drastically alter the on-off behavior of the dynamo in the nonlinear stage by quenching the noise. For small Reynolds numbers, the Lorentz force can trap the original chaotic system in the linear regime into a time-periodic state, resulting in no on-off intermittency. At larger Reynolds numbers $Gr > 20$, on-off intermittency was observed but with long durations of the on phases that have a power law distribution. These long on phases result in a PDF that peaks at finite values of E_b . This peak can be attributed to the presence of a subcritical instability or to the quenching of the hydrodynamic noise at the nonlinear stage, or possibly a combination of the two. In principle, the SDE model [Eq. (1)] can be modified to include these two effects: a nonlinear term that allows for a subcritical bifurcation and an E_b -dependent amplitude of the noise. There are many possibilities to model the quenching of the noise; however, the nonlinear behavior might not have a universal behavior and we do not attempt to suggest a specific model.

The relative range of the on-off intermittency was found to decrease as the Reynolds number was increased, possibly reaching an asymptotic regime. However, the limited number of Reynolds numbers examined did not allow us to give a definite prediction for this asymptotic regime. This question is of particular interest for dynamo experiments [2–8], which until very recently [26] have not detected on-off intermittency. There are many reasons that could explain the absence of detectable on-off intermittency in the experimental setups, like the strong constraints imposed on the flow [4,5], which do not allow the development of large-scale fluctuations, or the Earth's magnetic field, which imposes a lower threshold for the amplitude of the magnetic energy. Numerical investigations at higher resolution and a larger variety of flows or forcing would be useful at this point to obtain a better understanding.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank F. Pétrélis and J-F Pinton for fruitful discussions. A.A. acknowledges financial support from the Observatoire de la Côte d'Azur and the Rotary Clubs district 1730.

Y.P. thanks the CNRS Dynamo GdR, INSU/PNST, and INSU/PCMI Programs. Computer time was provided by IDRIS, and the Mesocenter SIGAMM machine, hosted by Observatoire de la Cote d'Azur.

-
- [1] H. K. Moffatt, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids* (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1978); F. Krause and K.-H. Radler, *Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory* (Pergamon, Oxford, 1980); E. N. Parker, *Cosmical Magnetic Fields* (Clarendon, Oxford, 1979).
- [2] A. Gailitis *et al.*, Phys. Rev. Lett. **84**, 4365 (2000).
- [3] A. Gailitis, O. Lielausis, E. Platacis, S. Dementev, A. Ciferons, G. Gerbeth, T. Gundrum, F. Stefani, M. Christen, and G. Will, Phys. Rev. Lett. **86**, 3024 (2001).
- [4] A. Gailitis *et al.*, Phys. Plasmas **11**, 2838 (2004).
- [5] U. Müller and R. Stieglitz, Naturwiss. **87**, 381 (2000).
- [6] R. Stieglitz and U. Müller, Phys. Fluids **13**, 561 (2001).
- [7] R. Monchaux *et al.*, Phys. Rev. Lett. **98**, 044502 (2007).
- [8] M. Berhanu *et al.*, Europhys. Lett. **77**, 59001 (2007).
- [9] P. Odier, J.-F. Pinton, and S. Fauve, Phys. Rev. E **58**, 7397 (1998).
- [10] N. L. Peffley, A. B. Cawthorne, and D. P. Lathrop, Phys. Rev. E **61**, 5287 (2000).
- [11] N. L. Peffley *et al.*, Geophys. J. Int. **142**, 52 (2000).
- [12] P. Frick *et al.*, Magnetohydrodynamics **38**(1/2), 143 (2002).
- [13] M. Bourgoïn *et al.*, Phys. Fluids **14**, 3046 (2002).
- [14] M. D. Nornberg, E. J. Spence, R. D. Kendrick, C. M. Jacobson, and C. B. Forest, Phys. Rev. Lett. **97**, 044503 (2006).
- [15] M. D. Nornberg *et al.*, Phys. Plasmas **13**, 055901 (2006).
- [16] R. Stepanov, R. Volk, S. Denisov, P. Frick, V. Noskov, and J.-F. Pinton, Phys. Rev. E **73**, 046310 (2006).
- [17] R. Volk, P. Odier, and J.-F. Pinton, Phys. Fluids **18**, 085105 (2006).
- [18] M. Bourgoïn *et al.*, New J. Phys. **8**, 329 (2006).
- [19] Y. Pomeau and P. Manneville, Commun. Math. Phys. **74**, 189 (1980).
- [20] N. Platt, E. A. Spiegel, and C. Tresser, Phys. Rev. Lett. **70**, 279 (1993).
- [21] D. Sweet, E. Ott, J. M. Finn, T. M. Antonsen, Jr., and D. P. Lathrop, Phys. Rev. E **63**, 066211 (2001).
- [22] D. Sweet, E. Ott, T. M. Antonsen, Jr., D. P. Lathrop, and J. M. Finn, Phys. Plasmas **8**, 1944 (2001).
- [23] A. S. Pikovsky, Z. Phys. B: Condens. Matter **55**, 149 (1984); P. W. Hammer, N. Platt, S. M. Hammel, J. F. Heagy, and B. D. Lee, Phys. Rev. Lett. **73**, 1095 (1994); T. John, R. Stannarius, and U. Behn, *ibid.* **83**, 749 (1999); D. L. Feng, C. X. Yu, J. L. Xie, and W. X. Ding, Phys. Rev. E **58**, 3678 (1998); F. Rodelsperger, A. Cenys, and H. Benner, Phys. Rev. Lett. **75**, 2594 (1995).
- [24] N. Leprovost, B. Dubrulle, F. Plunian, Magnetohydrodynamics **42**, 131 (2006).
- [25] Y. Ponty, J.-P. Laval, B. Dubrulle, F. Daviaud, and J.-F. Pinton, Phys. Rev. Lett. **99**, 224501 (2007).
- [26] J. Pinton, private communication.
- [27] H. Fujisaka and T. Yamada, Prog. Theor. Phys. **74**, 918 (1985); H. Fujisaka, H. Ishii, M. Inoue, and T. Yamada, *ibid.* **76**, 1198 (1986).
- [28] E. Ott and J. C. Sommerer, Phys. Lett. A **188**, 39 (1994).
- [29] L. Yu, E. Ott, and Q. Chen, Phys. Rev. Lett. **65**, 2935 (1990).
- [30] N. Platt, S. M. Hammel, and J. F. Heagy, Phys. Rev. Lett. **72**, 3498 (1994).
- [31] J. F. Heagy, N. Platt, and S. M. Hammel, Phys. Rev. E **49**, 1140 (1994).
- [32] S. C. Venkataramani, T. M. Antonsen, Jr., E. Ott, and J. C. Sommerer, Phys. Lett. A **207**, 173 (1995).
- [33] S. C. Venkataramani, T. M. Antonsen, Jr., E. Ott, and J. C. Sommerer, Physica D **96**, 66 (1996).
- [34] S. Aumaître, F. Pétrélis, and K. Mallick, Phys. Rev. Lett. **95**, 064101 (2005).
- [35] S. Aumaître, K. Mallick, and F. Pétrélis, J. Stat. Phys. **123**, 909 (2006).
- [36] F. Cattaneo, D. W. Hughes, and E. J. Kim, Phys. Rev. Lett. **76**, 2057 (1996).
- [37] E. Zienicke, H. Politano, and A. Pouquet, Phys. Rev. Lett. **81**, 4640 (1998).
- [38] N. H. Brummell, F. Cattaneo, and S. M. Tobias, Fluid Dyn. Res. **28**, 237 (2001).
- [39] V. I. Arnold, C. R. Hebd. Seances Acad. Sci. **261**, 17 (1965).
- [40] T. Dombre, U. Frisch, J. M. Greene, M. Henon, A. Mehr, and A. Soward, J. Fluid Mech. **167**, 353 (1986).
- [41] D. J. Galloway and M. R. E. Proctor, Nature (London) **356**, 691 (1992).
- [42] Y. Ponty, A. Pouquet, and P. L. Sulem, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **79**, 239 (1995).
- [43] V. I. Arnold and E. I. Korkina, Vestn. Mosk. Univ. Mat. Mekh. **3**, 43 (1983).
- [44] D. J. Galloway and U. Frisch, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **36**, 53 (1986).
- [45] B. Galanti, P. L. Sulem, and A. Pouquet, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **66**, 183 (1992).
- [46] V. Archontis, S. B. F. Dorch, and A. Nordlund, Astron. Astrophys. **397**, 393 (2003).
- [47] R. Teyssier, S. Fromang, and E. Dormy, J. Comput. Phys. **218**, 44 (2006).
- [48] S. Childress and A. D. Gilbert, *Stretch, Twist, Fold: The Fast Dynamo* (Springer, New York, 1995).
- [49] H. K. Moffatt and M. R. Proctor, J. Fluid Mech. **154**, 493 (1985).
- [50] B. J. Bayly and S. Childress, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **44**, 211 (1988).
- [51] J. M. Finn and E. Ott, Phys. Fluids **31**, 2992 (1988).
- [52] J. M. Finn and E. Ott, Phys. Rev. Lett. **60**, 760 (1988).
- [53] O. M. Podvigina and A. Pouquet, Physica D **75**, 471 (1994).
- [54] O. M. Podvigina, Physica D **128**, 250 (1999).
- [55] P. Ashwin and O. Podvigina, Proc. R. Soc. London, Ser. A **459**, 1801 (2003).
- [56] O. Podvigina, P. Ashwin, and D. J. Hawker, Physica D **215**, 62 (2006).
- [57] P. D. Mininni, Phys. Plasmas **13**, 056502 (2006).

B.7 Tous ensembles

B.7.1 Notes personnelles

Cette publication est clairement une collection des travaux des équipes qui ont travaillé sur la dynamo dans un écoulement entretenu par un forçage de Taylor-Green et en permet une vision globale. J'ai réussi à faire coller tout cela ensemble, le seul apport vraiment nouveau c'est l'utilisation du modèle sous-maille dynamique développé dans la thèse de Julien Baerenzung [[Baerenzung 2008b](#), [Baerenzung 2008a](#), [Baerenzung 2010](#)] afin de permettre de continuer la courbe du seuil critique de l'effet dynamo en fonction du nombre de Reynolds cinétique.

The dynamo effect/L'effet dynamo

Linear and non-linear features of the Taylor–Green dynamo

Yannick Ponty ^{a,*}, Pablo D. Mininni ^{b,d}, Jean-Philippe Laval ^c, Alexandros Alexakis ^{a,d},
Julien Baerenzung ^{a,d}, François Daviaud ^e, Bérengère Dubrulle ^e, Jean-François Pinton ^f,
Hélène Politano ^a, Annick Pouquet ^d

^a Observatoire de la Côte d'Azur, CNRS and Université de Nice Sophia-Antipolis, BP 4229, Nice cedex 04, France

^b Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Ciudad Universitaria,
1428 Buenos Aires, Argentina

^c Laboratoire de mécanique de Lille, CNRS, boulevard Paul-Langevin, 59655 Villeneuve d'Ascq, France

^d NCAR, P.O. Box 3000, Boulder, Colorado 80307-3000, USA

^e Service de physique de l'état condensé, CNRS et CEA-Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette, France

^f Laboratoire de physique, de l'École normale supérieure de Lyon, CNRS et Université de Lyon, 46, allée d'Italie, 69007 Lyon, France

Available online 6 September 2008

Abstract

The Taylor–Green flow is a model flow sharing many properties with the von Kármán flow, in which experimental turbulent dynamo action has recently been achieved. We present here recent numerical results on the Taylor–Green dynamo instability, both in the linear and non-linear regime. Various properties are considered, such as the influence of turbulence, the energy transfer between different scales, the spatial structure of the neutral mode, the nature of the bifurcation and the saturation mechanisms. We also discuss the role of the velocity fluctuations on the dynamo onset. *To cite this article: Y. Ponty et al., C. R. Physique 9 (2008).* © 2008 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

Résumé

Étude linéaire et non linéaire d'une dynamo produite par un forçage de Taylor–Green. Un écoulement turbulent forcé par un tourbillon de type Taylor–Green, partage de nombreuses propriétés avec l'écoulement de von Kármán dans lequel une dynamo turbulente a été récemment mise en évidence expérimentalement. Nous présentons des résultats récents de dynamos numériques engendrées par des tourbillons de Taylor–Green dans les régimes linéaire et non linéaire. Nous discutons certaines de ses propriétés comme l'influence de la turbulence, le transfert d'énergie entre différentes échelles, la structure du mode neutre, la nature de la bifurcation et les mécanismes de saturation. Nous discutons également le rôle joué par les fluctuations de vitesse sur le seuil de la dynamo. *Pour citer cet article : Y. Ponty et al., C. R. Physique 9 (2008).*

© 2008 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

Keywords: Dynamo; Magnetohydrodynamics; Turbulence; Taylor–Green

Mots-clés : Dynamo ; Magnétohydrodynamique ; Turbulence ; Taylor–Green

* Corresponding author.

E-mail address: Yannick.Ponty@oca.eu (Y. Ponty).

1. Introduction

Dynamo action, the self generation of magnetic field by a conducting moving fluid, is considered to be the main source of magnetic fields in the universe [1]. Over the past decades, experimental efforts have been devoted to the understanding of this magnetic induction [2–7] and dynamo action. To date, three groups have successfully achieved dynamos in liquid sodium laboratory experiments [8–11].

In parallel, several groups have been studying the problem using numerical methods. Ideally, one should build realistic simulations of the dynamos (natural or laboratory) taking into account the precise geometry, the effect of the fluid and magnetic boundary conditions. This is currently achieved using finite element, finite volume or finite difference mesh schemes [12–14]. However, it is possible to study numerically some aspects of experimental dynamo behaviour with simple three-dimensional periodic boundary conditions. We review here several numerical results obtained using the Taylor–Green forcing in a periodic box.

2. Numerical method

Incompressible turbulent flows have been intensively studied in a periodic space, a classical mathematical framework for theories [15] as well as for numerical simulations of isotropic and homogeneous turbulence [16,17]. In this geometry, the pseudo-spectral numerical method is the most precise global numerical method for a fixed mesh size. In the present work, we use the pseudo-spectral method initiated by the work of Orszag and Patterson (1971) [16]. The success of this method is essentially due to the high accuracy and the efficiency of the Fast Fourier Transform.

2.1. Basic equations

We consider the incompressible magnetohydrodynamic equations (1), (2)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{F} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v} + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2)$$

together with $\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$; a constant mass density $\rho = 1$ is assumed. Here, \mathbf{v} stands for the velocity field, \mathbf{B} the magnetic field (in units of Alfvén velocity), $\mathbf{j} = (\nabla \times \mathbf{B})/\mu_0$ the current density, ν the kinematic viscosity, η the magnetic diffusivity and P is the pressure. The forcing term \mathbf{F} is the Taylor–Green vortex (TG) [18],

$$\mathbf{F}_{\text{TG}}(k_0) = F_0 \begin{bmatrix} \sin(k_0 x) \cos(k_0 y) \cos(k_0 z) \\ -\cos(k_0 x) \sin(k_0 y) \cos(k_0 z) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

As direct numerical simulations (DNS) are rapidly limited, different sub-grid models have been used in order to reach the highest possible kinetic Reynolds numbers: (i) Large Eddy Simulation (LES) for the hydrodynamic field [19] with no model in the induction equation [20,21]; (ii) modelling of the full MHD system with a filtering, using the ‘alpha model’ [22,23]; and (iii) using a dynamical spectral LES scheme [24,25].

2.2. Non-dimensional numbers

In our code, the dimensional form of the MHD (1), (2) equations is computed, and dimensionless numbers are calculated a posteriori, using the numerical output. We define the Reynolds numbers as $R_v = \frac{LV}{\nu}$ and $R_m = \frac{LV}{\eta}$ with a characteristic velocity V , length scale L and the viscosity ν or the magnetic diffusivity η . There are several possible choices for these characteristic quantities. For the velocity, one may use the root mean square (r.m.s), the average in time or the maximum of the velocity field. Similarly, for the length scale one may use the size of the box, the integral scale of the fluid or the Taylor micro-scale. In the studies reported here, several different choices have been made and we will give the corresponding definitions in each particular case.

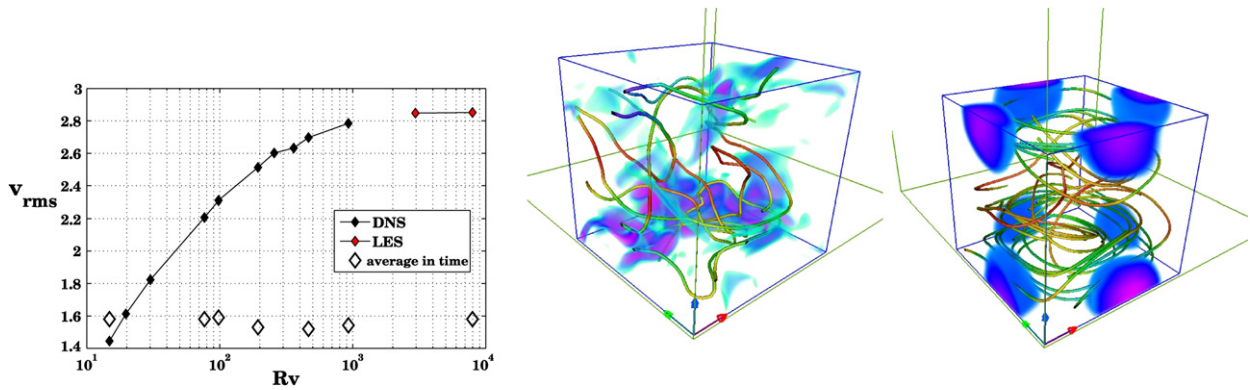


Fig. 1. (a, l.h.s. fig) Variation with Reynolds number of the velocity fluctuations for the dynamic flow $V_{rms} = \langle \sqrt{2E_v(t)} \rangle_t$ (filled symbols and solid lines) and its time-average, $\bar{V}_{rms} = \sqrt{2E_v}$ (open diamonds); (b, middle fig) snapshot of the velocity inside one fundamental Taylor–Green box, shown in volume rendering of the kinetic energy, and some field line trajectories. (c, r.h.s. fig) volume rendering of the kinetic energy for the time average velocity (*imaging made with Vapor* [29]).

3. Dynamo action in the Taylor–Green flow

When k_0 is set to one in Eq. (3), the Taylor–Green flow lies within a fundamental box of volume $(\pi/2)^3$, so that there are 8 fundamental boxes inside the 2π -periodic computational domain (note that the different fields are able to cross these virtual frontiers, these boxes are permeable). Inside each fundamental box, the Taylor–Green vortex has hydrodynamic properties similar to the experimental von Kármán vortex [26]. Such a forcing generates a numerical dynamo with a magnetic Prandtl number of order one [27,28]. Note that the Taylor–Green vortex (Eq. (3)) by itself cannot produce a kinematic dynamo, because it is a 2-dimensional flow. Dynamo instability is only obtained in the full 3D flow created by the non-linear term of the Navier–Stokes equation.

3.1. Mean flow dynamo

With the Taylor–Green forcing, a mean flow develops with superimposed turbulent fluctuations covering all spatial and temporal scales. However, one observes that the level of velocity fluctuations saturates in the limit of large Reynolds numbers – see Fig. 1(a) – as the flow is forced with a constant force F_0 and only the fluid viscosity is changed.

Fig. 1(b) shows volume rendering of the velocity field for the instantaneous velocity field. At all investigated kinetic Reynolds numbers, the time-average of the velocity converges to a well-defined mean flow, shown in Fig. 1(c). The r.m.s. speed of the mean flow is shown by the open diamonds, Fig. 1(a), that remaining after taking the time average (the distance between the filled and the open diamonds) corresponds to velocity fluctuations, that for large Reynolds number have an approximately constant level. It is also observed that this time-averaged velocity field varies very little with the Reynolds number [30], even at high R_v .

The dynamo capacity of this time-average flow can be analysed in kinematic dynamo computations. Fig. 2(a) shows a typical evolution of the growth rate of magnetic energy (starting from a seed field). One observes two regions of magnetic Reynolds numbers with positive growth rates – i.e. dynamo branches [31,32,30]. The first dynamo mode evolves at larger scales than the fundamental TG box – Fig. 2(b); it operates in a range of magnetic Reynolds numbers $20 < R_m < 50$. The second dynamo mode develops within the fundamental box – Fig. 2(c) – for magnetic Reynolds numbers in excess of about 180. Its shape is similar to the one obtained in kinematic simulation for the Von Kármán time-averaged velocity field [33,34].

3.2. Kinematic dynamo regime at high Reynolds number

In this section, we study dynamo action from the dynamical velocity fields in the numerical simulations. The Reynolds number is computed using the average in time – labelled $\langle \cdot \rangle_t$ – of the root mean square velocity, and the integral scale is calculated from the one-dimensional energy spectra $E_v(k)$,

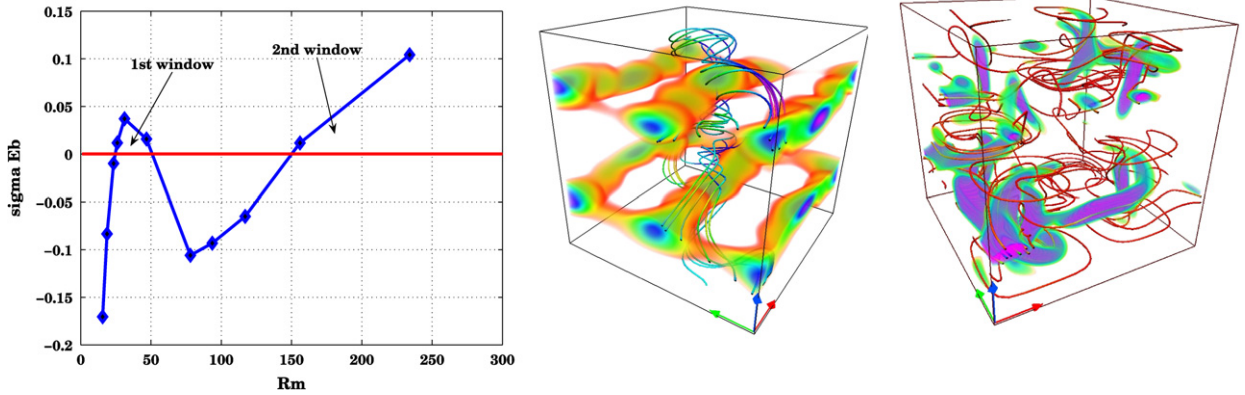


Fig. 2. (a, l.h.s. fig) Growth rates for the kinematic dynamo generated by mean flow versus the magnetic Reynolds number; (b, middle fig.) kinematic eigenmode of the first dynamo window (at low R_M); (c, r.h.s. fig) kinematic eigenmode of the second dynamo window (at large R_M). Both eigenmodes are shown in volume rendering of the magnetic energy, and some magnetic field line (*imagery made with Vapor [29]*).

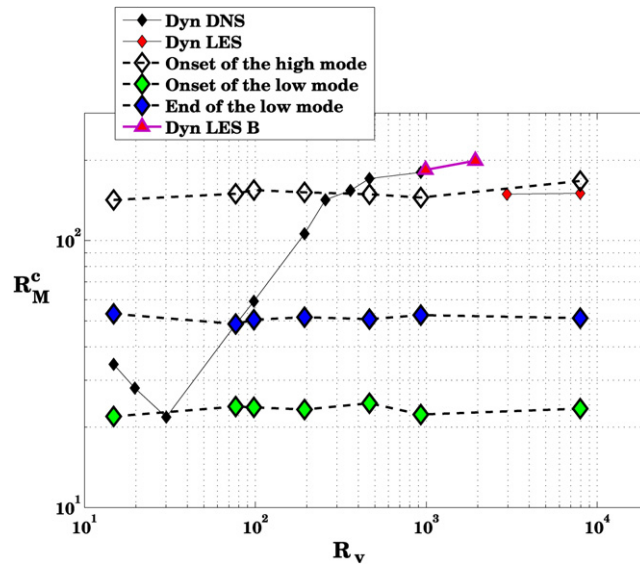


Fig. 3. (Evolution of the critical magnetic Reynolds numbers in kinematic runs. The dashed line connects simulations using a time-averaged velocity field, while for the solid line the full dynamical field is used. At the largest R_v values, a LES sub-grid modelling of the velocity small scales is used (LES [21], LES B [25]).

$$R_v = \frac{2\pi}{\nu} \langle \sqrt{2E_v(t)} \rangle_t \left\langle \frac{\sum \frac{E_v(k,t)}{k} dk}{E_v(t)} \right\rangle_t \quad (4)$$

At very low Reynolds number, the flow is laminar with weak temporal velocity fluctuations. The low-Reynolds number flow is very close to its time-average, and the dynamo is found to operate in the vicinity of the kinematic dynamo of the time-averaged flow. High Reynolds number flows are obtained when the hydrodynamic viscosity is decreased while keeping constant the forcing amplitude F_0 . One observes that the flow destabilises rapidly and turbulence sets in.

The threshold for linear dynamo instability have been computed numerically for TG forcing over the past years [21,31]. The results are summarised in Fig. 3. Using both Direct Numerical Simulations (DNS) and modelling of the turbulent small-scales, high kinetic Reynolds number have been reached. We have observed, for the first time, that while turbulence tends to increase the threshold compared to the laminar case, the critical magnetic Reynolds number saturates to a value of about 170, for R_v 's in excess of 1000. Note that increasing kinetic Reynolds numbers with a

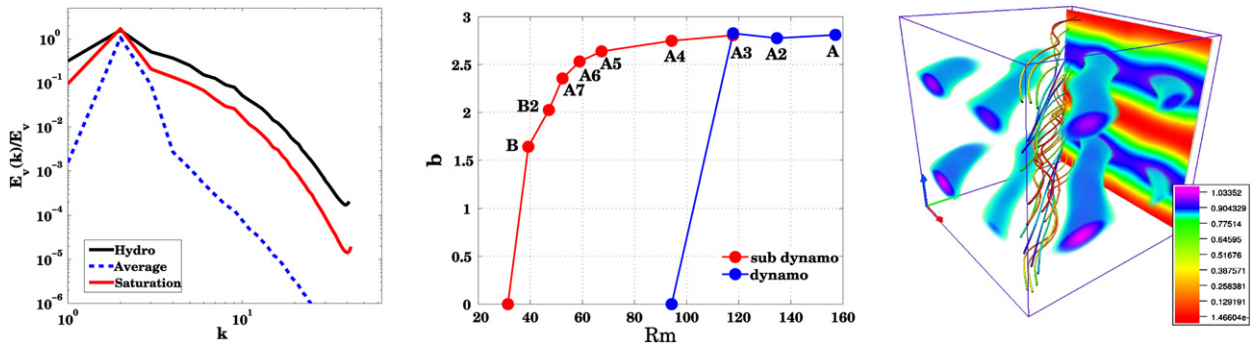


Fig. 4. (a, l.h.s. fig) Energy spectra of the velocity of TG flow below threshold (DNS, black line), above threshold in the saturated regime (red line) and for the time average velocity field (blue dashed line) – point A in the bifurcation curve; (b, middle fig.) bifurcation curves and hysteresis cycles; (c, r.h.s. fig) volume rendering, magnetic streamline and a plane representation of the magnetic energy in the saturated regime, at point A in the bifurcation curve.

constant magnetic Reynolds number corresponds to situations with a decreasing Prandtl number, a situation that tends to approximate the case of liquid metal experiments. Here, the lowest magnetic Prandtl number is around 10^{-2} .

One can also compare in Fig. 3 the variation of the critical magnetic Reynolds numbers R_m^c with the Reynolds number in the first and second kinematic dynamo windows. At low R_v , the dynamo threshold for the dynamical problem lies within the low R_m dynamo window for the time-averaged flow. For R_v larger than about 200, the dynamical dynamo threshold lies in the immediate vicinity of the upper kinematic dynamo branch (high R_m^c mode of the time-averaged flow). At this stage, it is unclear whether the effect of the fluctuations in the dynamical runs is to increase the threshold of the first kinematic window, or decrease the threshold of the second one.

3.3. Saturation of the Taylor–Green dynamo

When the non-linear regime is reached, the Lorentz force has modified the velocity field. Its influence at all scales of motions can be seen in Fig. 4(a). Fluctuations at all scales have been reduced [35].

In some cases, the Lorentz force alters so strongly the flow that the MHD flow jumps to another attractor. This attractor may not be able to sustain the dynamo as observed in [36]. In the TG case we have observed that the changes in the flow induced by the Lorentz force generate sub-criticality in the bifurcation [37]. As seen in Fig. 4(b), once the dynamo is generated (say, at point A in the figure), it can be sustained when the magnetic Reynolds number is decreased way below the linear threshold (until point B in the figure).

The way in which the Lorentz forces actually alters the velocity field and its dynamics will require further studies. As a first step, we show in Fig. 4(c) that for the Taylor–Green forcing, the saturated time averaged magnetic energy is concentrated inside horizontal tubes and located in the $(z = \pi/2$ and $z = 3\pi/2)$ planes, where the differential rotation is strongest. Inside these two planes, the magnetic tubes are aligned along the diagonal, in the largest scale.

3.4. Energy transfer

A complete study of locality or non-locality of the energy transfer has been performed for the different MHD regimes in references [38–40]. A shell-to-shell study of energy transfers has led to the following picture. The energy flux in hydrodynamic turbulence was found to be dominated by local interactions for very large Reynolds numbers; energy is injected at large scale by the Taylor–Green forcing and transferred at small scale through the local energy cascade – this is also valid for pure magnetic energy transfers. More surprising are the transfers of energy between the kinetic energy and the magnetic energy: for a given magnetic energy shell, non-local transfers from all the hydrodynamic scales have been observed, with a peak around the forcing scale. In the non-linear regime, a given magnetic energy shell transfers energy to smaller hydrodynamic scales. This non-local behaviour certainly deserves further investigations. From a technical point of view, it indicates that the separation between large- and small-scale dynamos can be artificial, and that the interpretation of the role of fluctuations cannot be easily reduced by local and phenomenological arguments. Indeed, the analysis showed (for Reynolds numbers large enough) the coexistence of large- and small-scale dynamo action in the Taylor–Green flow, and it indicated that fluctuations in the large scale flow can be a

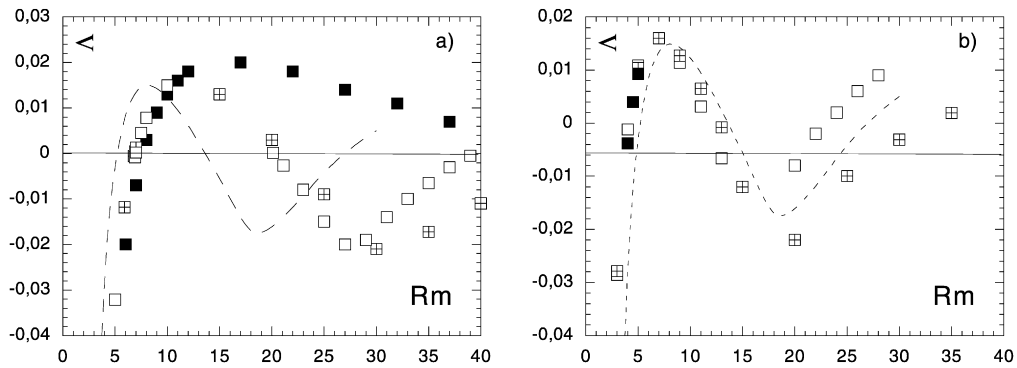


Fig. 5. Evolution of the growth rate Λ versus R_m for different noise intensity and correlation time in stochastic simulations at $R_v = 6$. The dotted line is growth rate at $\delta = 1$ (no noise): (a) for a Markovian noise at $k_I = 1$, $\delta = 1.5$; (b) for a Markovian noise at $k_I = 16$, $\delta = 1.7$: square $\tau_c = 0$; box $\tau_c = 0.03$; black square $\tau_c = 0.3$.

source of small-scale magnetic fields. It also showed the necessity to have a well resolved hydrodynamic simulation, where all the non-linear interactions can be computed in a realistic way.

4. Turbulence and stochastic noise

In [32,30], direct and stochastic numerical simulations have been used to explore the influence of turbulence on the dynamo threshold. In the spirit of the Kraichnan–Kazantsev model, turbulent fluctuations are modelled by noise, with given amplitude, injection scale k_I and correlation time τ_c . The addition of a stochastic noise to the mean velocity significantly alters the dynamo threshold and increases it for any noise at large scale. For small scale noise, the results depends on the correlation time and on the magnetic Prandtl number.

For the purpose of these studies, the magnetic Reynolds number is defined as.

$$R_m = \frac{1}{\eta} \left\langle \sqrt{2/3 E_v(t)} \cdot \frac{3\pi}{4E_v(t)} \sum E_V(k, t)/k dk \right\rangle_t \quad (5)$$

and the level of noise $\delta = E_v/E_{(v)}$ is the ratio of the full kinetic energy and the kinetic energy of the average in time velocity. The noise amplitude is chosen so as to mimic the fluctuation level in full dynamical simulation shown in Fig. 1.

In Fig. 5, the magnetic growth rate – defining the dynamo windows – is seen to be modified by the addition of noise on the Taylor–Green mean flow, especially when the noise is injected at large scale and with long correlation time. Whether these results can be extended to real velocity fluctuations is still an open problem under investigation.

5. Conclusion

Simulation of dynamo action using the TG forcing has allowed to address some issues regarding the effect of turbulence on dynamo generation. One result is that the threshold for onset is lower when the underlying flow has a well-defined mean structure, compared to random forcing [21,41]. Another finding is that, even though the threshold for turbulent flow is higher than for the laminar base flow, it tends to saturates in the limit of high kinetic Reynolds numbers (correspondingly in the low Prandtl number limit).

The role of turbulent fluctuations at small scale is still to be clarified. Adding stochastic noise to the TG flow increases the threshold for dynamo action, but in the case of real hydrodynamic fluctuations the threshold is observed to be close to the kinematic high mode – Fig. 3. On the other hand, studies of scale interactions in MHD flows have shown that fluctuations of the large scale flow and at intermediate scales can act as a dynamo source for small scale magnetic fluctuations, while small scale fluctuations enhance the Joule dissipation of the field. It has also been observed in the VKS experiment that the self-sustained dynamo is of the $\alpha - \omega$ type [10], so that turbulent fluctuations are essential.

Some information about the mechanisms which drive the dynamo saturation in the non-linear regime have been obtained. In particular, the shell-to-shell energy transfer analysis reveals the non-locality of the energy transfer between the fluid and the magnetic field. This must be taken into account in further studies and models.

Finally, the observed subcriticality in the Taylor–Green dynamo may be promising for experiments and modelling of natural dynamos (it has been observed in numerical models of the geodynamo as well [42–44]), and indications of subcriticality have been observed in the VKS experiment [45].

We still need much effort to reach realistic numerical simulations at high Reynolds numbers inside bounded domains. In the mean time, studies in open periodic boxes and pseudo-spectral method remain a convenient numerical tool to study the turbulent dynamo.

Acknowledgements

The French authors thank CNRS Dynamo GdR, CNRS Turbulence GdR, INSU/PNST and INSU/PCMI Programs, “programme de Planétologie”. A.A. acknowledged the financial support of Observatoire de la Côte d’Azur and the Rotary Club district 1730. The NSF grant CMG-0327888 is gratefully acknowledged by the USA authors. P.D.M. is a member of the Carrera del Investigador Científico of CONICET. Y.P. thanks A. Miniussi for computing design assistance. Computer time was provided by IDRIS, the Mesocentre SIGAMM machine, hosted by Observatoire de la Côte d’Azur, NCAR and Pittsburg Supercomputing center.

References

- [1] H.K. Moffatt, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids*, Cambridge University Press, Cambridge, 1978; E.N. Parker, *Cosmical Magnetic Fields*, Clarendon Press, Oxford, 1979.
- [2] P. Odier, J.-F. Pinton, S. Fauve, Advection of a magnetic field by a turbulent swirling flow, *Phys. Rev. E* 58 (1998) 7397–7401.
- [3] N.L. Peffley, A.B. Cawthorne, D.P. Lathrop, Toward a self-generating magnetic dynamo, *Phys. Rev. E* 61 (2000) 5287.
- [4] M. Bourgoin, L. Marié, F. Pétrélis, C. Gasquet, A. Guiguon, J.-B. Luciani, M. Moulin, F. Namer, J. Burguete, F. Daviaud, A. Chiffaudel, S. Fauve, Ph. Odier, J.-F. Pinton, MHD measurements in the von Kármán sodium experiment, *Phys. Fluids* 14 (2002) 3046.
- [5] M.D. Normberg, E.J. Spence, R.D. Kendrick, C.M. Jacobson, C.B. Forest, Intermittent magnetic field excitation by a turbulent flow of liquid sodium, *Phys. Rev. Lett.* 97 (2006) 044503.
- [6] R. Stepanov, R. Volk, S. Denisov, P. Frick, V. Noskov, J.-F. Pinton, Induction, helicity, and alpha effect in a toroidal screw flow of liquid gallium, *Phys. Rev. E* 73 (2006) 046310.
- [7] R. Volk, P. Odier, J.-F. Pinton, Fluctuation of magnetic induction in von Kármán swirling flows, *Phys. Fluids* 18 (2006) 085105.
- [8] A. Gailitis, O. Lielausis, S. Dement’ev, A. Ciferons, G. Gerbeth, T. Gundrum, F. Stefani, M. Christen, H. Hänel, G. Will, Magnetic field saturation in the Riga dynamo experiment, *Phys. Rev. Lett.* 86 (2001) 3024.
- [9] R. Stieglitz, U. Müller, Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo, *Phys. Fluids* 13 (2001) 561.
- [10] R. Monchaux, M. Berhanu, M. Bourgoin, M. Moulin, Ph. Odier, J.-F. Pinton, R. Volk, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle, C. Gasquet, L. Marié, F. Ravelet, Generation of a magnetic field by dynamo action in a turbulent flow of liquid sodium, *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007) 044502.
- [11] M. Berhanu, R. Monchaux, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis, A. Chiffaudel, F. Daviaud, F. Ravelet, M. Bourgoin, Ph. Odier, J.-F. Pinton, R. Volk, B. Dubrulle, L. Marie, Magnetic field reversals in an experimental turbulent dynamo, *Europhys. Lett.* 77 (2007) 59001.
- [12] J.L. Guermond, J. Léorat, C. Nore, A new finite Element Method for magneto-dynamical problems: two-dimensional results, *Eur. J. Mech. B/Fluids* 22 (2003) 555.
- [13] A.B. Isakov, S. Descombes, E. Dormy, An integro-differential formulation for magnetic induction in bounded domains: boundary element-finite volume method, *J. Comput. Phys.* 197 (2004) 540–554.
- [14] J.L. Guermond, R. Laguerre, J. Léorat, C. Nore, An interior penalty Galerkin method for the MHD equations in heterogeneous domains, *J. Comput. Phys.* 221 (2007) 349–369.
- [15] U. Frisch, *Turbulence: The Legacy of A.N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, 1996.
- [16] S.A. Orszag, J.S. Patterson Jr, Numerical simulation of three-dimensional homogeneous isotropic turbulence, *Phys. Rev. Lett.* 28 (1972) 76–79.
- [17] A. Vincent, M. Meneguzzi, The spatial structure and the statistical properties of homogeneous turbulence, *J. Fluid Mech.* 225 (1991) 1–25.
- [18] M.E. Brachet, D.I. Meiron, S.A. Orszag, B.G. Nickel, R.H. Morf, U. Frisch, Small-scale structure of the Taylor–Green vortex, *J. Mech. Fluids* 130 (1983) 411–452.
- [19] M. Lesieur, *Turbulence in Fluids*, Kluwer, 1997.
- [20] Y. Ponty, J.F. Pinton, H. Politano, Simulation of induction at low magnetic Prandtl number, *Phys. Rev. Lett.* 92 (14) (2004) 144503.
- [21] Y. Ponty, P.D. Mininni, A. Pouquet, H. Politano, D.C. Montgomery, J.-F. Pinton, Numerical study of dynamo action at low magnetic Prandtl numbers, *Phys. Rev. Lett.* 94 (2005) 164512.
- [22] D.C. Montgomery, A. Pouquet, An alternative interpretation for the Holm alpha model, *Phys. Fluids* 14 (2002) 3365.
- [23] P.D. Mininni, D.C. Montgomery, A. Pouquet, Numerical solutions of the three-dimensional magnetohydrodynamic alpha model, *Phys. Rev. E* 71 (2005) 046304.

- [24] J. Baerenzung, H. Politano, Y. Ponty, A. Pouquet, Spectral modeling of turbulent flows and the role of helicity, *Phys. Rev. E* 77 (2008) 046303.
- [25] J. Baerenzung, H. Politano, Y. Ponty, A. Pouquet, Spectral modeling of magnetohydrodynamic turbulent flows, *Phys. Rev. E* (2008), in press.
- [26] S. Douady, Y. Couder, M.-E. Brachet, Direct observation of the intermittency of intense vorticity filaments in turbulence, *Phys. Rev. Lett.* 67 (1991) 983.
- [27] C. Nore, M. Brachet, H. Politano, A. Pouquet, Dynamo action in the Taylor–Green vortex near threshold, *Phys. Plasmas* 4 (1997) 1.
- [28] C. Nore, M.-E. Brachet, H. Politano, A. Pouquet, Dynamo action in a forced Taylor–Green vortex, in: P. Chossat, D. Armbruster, I. Oprea (Eds.), *Dynamo and Dynamics, a Mathematical Challenge*, Cargèse, France, 21–26 August 2000, in: *Nato Science Series II*, vol. 26, Kluwer Academic, Dordrecht, 2001, pp. 51–58. Proceedings of the Nato Advanced Research Workshop.
- [29] J. Clyne, P.D. Mininni, A. Norton, M. Rast, Interactive desktop analysis of high resolution simulations: application to turbulent plume dynamics and current sheet formation, *New J. Phys.* 9 (2007) 301.
- [30] B. Dubrulle, P. Blaineau, O. Mafra Lopes, F. Daviaud, J.-P. Laval, R. Dolganov, Bifurcations and dynamo action in a Taylor–Green flow, *New J. Phys.* 9 (2007) 308.
- [31] Y. Ponty, P.D. Mininni, J.-F. Pinton, H. Politano, A. Pouquet, Dynamo action at low magnetic Prandtl numbers: mean flow versus fully turbulent motions, *New J. Phys.* 9 (2007) 296.
- [32] J.-P. Laval, P. Blaineau, N. Leprovost, B. Dubrulle, F. Daviaud, Influence of turbulence on the dynamo threshold, *Phys. Rev. Lett.* 96 (2006) 204503.
- [33] L. Marié, J. Burgete, F. Daviaud, J. Léorat, Numerical study of homogeneous dynamo based on experimental von Karman type flows, *Eur. Phys. J. B* 33 (2003) 469.
- [34] F. Ravelet, A. Chiffaudel, F. Daviaud, J. Léorat, Toward an experimental von Kármán dynamo: Numerical studies for an optimized design, *Phys. Fluids* 17 (2005) 117104.
- [35] P.D. Mininni, Y. Ponty, D.C. Montgomery, J.-F. Pinton, H. Politano, A. Pouquet, Dynamo regimes with a non-helical forcing, *Astrophys. J.* 626 (2005) 853–863.
- [36] N.H. Brummell, F. Cattaneo, S.M. Tobias, Linear and nonlinear dynamo properties of time-dependent ABC flows, *Fluid Dynam. Res.* 28 (2001) 237–265.
- [37] Y. Ponty, J.-P. Laval, B. Dubrulle, F. Daviaud, J.-F. Pinton, Subcritical dynamo bifurcation in the Taylor–Green flow, *Phys. Rev. Lett.* 99 (2007) 224501.
- [38] A. Alexakis, P.D. Mininni, A. Pouquet, Shell-to-shell energy transfer in magnetohydrodynamics. I. Steady state turbulence, *Phys. Rev. E* 72 (2005) 046301.
- [39] P. Mininni, A. Alexakis, A. Pouquet, Shell-to-shell energy transfer in magnetohydrodynamics. II. Kinematic dynamo, *Phys. Rev. E* 72 (2005) 046302.
- [40] A. Alexakis, P.D. Mininni, A. Pouquet, Turbulent cascades, transfer, and scale interactions in magnetohydrodynamics, *New J. Phys.* 9 (2007) 298.
- [41] A.A. Schekochihin, A.B. Iskakov, S.C. Cowley, J.C. McWilliams, M.R.E. Proctor, T.A. Yousef, Fluctuation dynamo and turbulent induction at low magnetic Prandtl numbers, *New J. Phys.* 9 (2007) 300.
- [42] U.R. Christensen, P. Olson, G.A. Glatzmaier, Numerical modeling of the geodynamo: A systematic parameter study, *Geophys. J. Int.* 138 (1999) 393.
- [43] S. Stellmach, U. Hansen, Cartesian convection driven dynamos at low Ekman number, *Phys. Rev. E* 70 (2004) 056312.
- [44] V. Morin, Ph.D. Thesis, University Paris VI, 2005.
- [45] M. Berhanu, R. Monchaux, M. Bourgoïn, Ph. Odier, J.-F. Pinton, N. Plihon, R. Volk, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis, S. Aumaître, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle, F. Ravelet, Bistability between a stationary and an oscillatory dynamo in a turbulent flow of liquid sodium, *Europhys. Lett.* (03/2008), submitted for publication.

B.8 Dynamo à grande et petite échelle

B.8.1 Notes personnelles

Cet article a été pour moi, pour l'instant le plus long de tous. Il a commencé en 2004, j'ai participé au programme "Magnetohydrodynamic of Stellar Interiors" à l'Issac Newton Institute de Cambridge. Lors d'une discussion avec Franck Plunian, à la terrasse d'un pub à Cambridge nous avons évoqué l'utilisation du forçage de G.O Robert pour étudier le rôle des fluctuations de vitesse sur l'effet alpha naturellement présent dans cet écoulement. Avec Franck, nous nous sommes vu de nombreuses fois durant 2004 à 2010 et nous avons travaillé épisodiquement sur le projet. Cela a été lent, mais ce projet a bénéficié d'une grande maturité et il a finalement donné des résultats nouveaux. Je remercie Franck pour sa patience, il vrai que je n'ai pas été complètement disponible pendant cette période. Franck a rejoint l'équipe de géodynamo du laboratoire de géophysique (anciennement LGIT, maintenant ISTerre). Cela m'a permis de rencontrer souvent cette équipe, et nous avons actuellement un projet d'ANR en commun (MetalSpectral). J'apprécie beaucoup cette équipe et je me suis lié d'amitié avec certains de ces membres. Il y a une sorte d'acte manqué avec eux. En effet, j'avais postulé et j'avais été classé 3ème sur un poste MC en 1998 à profil plutôt expérimental; Frank lui aussi, n'était pas loin dans le classement. Ensuite j'avais postulé en 2000 en section 13 du CNRS pour les rejoindre, mais c'est l'année où j'ai obtenu ma position de CR1 en section 10 à l'Observatoire de la Côte d'Azur. Je n'ai donc pas pu les rejoindre, mais j'ai toujours beaucoup de plaisir à travailler avec eux à Grenoble, je me sens «presque» comme à la maison.

Transition from Large-Scale to Small-Scale Dynamo

Y. Ponty¹ and F. Plunian^{2,*}

¹*Université de Nice Sophia-Antipolis, CNRS, Observatoire de la Côte d'Azur, B.P. 4229, Nice cedex 04, France*

²*Institut des Sciences de la Terre, CNRS, Université Joseph Fourier, B.P. 53, 38041 Grenoble cedex 09, France*

(Received 30 August 2010; revised manuscript received 17 March 2011; published 15 April 2011)

The dynamo equations are solved numerically with a helical forcing corresponding to the Roberts flow. In the fully turbulent regime the flow behaves as a Roberts flow on long time scales, plus turbulent fluctuations at short time scales. The dynamo onset is controlled by the long time scales of the flow, in agreement with the former Karlsruhe experimental results. The dynamo mechanism is governed by a generalized α effect, which includes both the usual α effect and turbulent diffusion, plus all higher order effects. Beyond the onset we find that this generalized α effect scales as $O(Rm^{-1})$, suggesting the takeover of small-scale dynamo action. This is confirmed by simulations in which dynamo occurs even if the large-scale field is artificially suppressed.

DOI: [10.1103/PhysRevLett.106.154502](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.154502)

PACS numbers: 47.65.-d, 52.65.Kj, 91.25.Cw

The aim of the dynamo theory is to understand the physical mechanisms at the origin of magnetic fields in planets and stars. Owing to its complexity, it is useful to rely on simple examples for which the dynamo mechanism is well understood. One of them is the one produced by a periodic array of helical vortices. The laminar kinematic dynamo regime has been studied in detail by Roberts [1], revealing the two following features.

First, the dynamo mechanism relies on a scale separation between the flow and the magnetic field. The largest flow scale is given by the diameter of one vortex, whereas the magnetic field spreads over an infinite number of them. This dynamo mechanism is described by two simultaneous effects. The large-scale magnetic field is distorted by the flow, resulting in a magnetic field at the scale of one vortex. This distorted magnetic field and the flow, both at the vortex scale, combine together to generate a large-scale electromotive force. This large-scale electromotive force induces a large-scale magnetic field, thus closing the loop of the dynamo mechanism. There is even a coefficient of proportionality between the large-scale electromotive force and the large-scale magnetic field. It is called α in reference to the ideas developed in the more general context of the mean-field theory [2]. This dynamo mechanism is said to be large-scale, in reference to the magnetic spectrum which is peaked at the largest scale. One decade ago, the Roberts dynamo was taken as the starting point for an experimental demonstration of dynamo action [3]. The experimental results [4] confirmed the theoretical predictions [5], strongly supporting the large-scale dynamo mechanism.

Second, in the Roberts dynamo, the magnetic energy grows at a (slow) diffusive time scale instead of growing at the (fast) flow turnover time scale as expected in turbulent magnetohydrodynamics. Mathematically, this results in a magnetic growth rate $p \rightarrow 0$ in the limit $Rm \rightarrow \infty$, the magnetic Reynolds number being defined as $Rm = UL/\eta$,

where U and L are the characteristic flow intensity and length scale, η being the magnetic diffusivity. This tendency can be depicted directly from Ref. [1] in the curves giving p for different values of Rm . The asymptotic law giving p versus Rm has been derived analytically [6] and confirmed numerically [7]. It was also shown that $\alpha = O(Rm^{-1/2})$, suggesting that the large-scale dynamo mechanism vanishes in the limit of high Rm . Recent studies have shown that, for other flows, different behaviors of α are also possible [8].

In the context of turbulent dynamos, an even steeper scaling $\alpha = O(Rm^{-1})$ was suggested [9], due to the nonlinearities occurring in the full dynamo problem composed of the Navier-Stokes and induction equations. This was confirmed numerically for a flow forcing corresponding to a time-dependent Roberts-like dynamo and for a convective forcing with rotation [10]. In that case, the dynamo mechanism does not rely on the existence of large magnetic scales anymore. The energy transfers, from flow to magnetic field, occur at scales significantly smaller than the largest scale of the system. Small-scale dynamos generally have a higher dynamo onset than the large-scale ones and are more difficult to obtain at $Pm < 1$. In Refs. [11,12], advantage was taken from constant flow forcings inducing long-time coherent flows, and then small-scale dynamos have been obtained at Pm down to approximately 10^{-2} . For noncoherent forcings, the numerical evidences are limited to $Pm \geq 1$ so far [10], unless other approaches based on hyperviscosity [13] or shell models [14] are used. Weaker quenching of α has also been found in helical turbulence [15], challenging the previously mentioned results.

In the present Letter, we consider the 3D time-dependent problem of Navier-Stokes and induction equations, with a constant forcing corresponding to the Roberts flow geometry. We vary the viscosity in order to explore cases from laminar to fully turbulent flows. For a fully turbulent flow,

we vary the diffusivity in order to study how the dynamo mechanism varies increasing Rm and eventually determine the transition between large-scale and small-scale dynamo action.

We solve the following set of equations:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\nabla P - (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \nu \nabla^2 \mathbf{U} + \mathbf{F}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{U} + \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (2)$$

where both velocity \mathbf{U} and magnetic field \mathbf{B} are assumed to be divergenceless: $\nabla \cdot \mathbf{U} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. The forcing, expressed in a Cartesian frame $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, is given by

$$\mathbf{F} = (\sin x \cos y, -\cos x \sin y, \sqrt{2} \sin x \sin y). \quad (3)$$

It is force-free: $\nabla \times \mathbf{F} = \sqrt{2}\mathbf{F}$. In the limit of high viscosity ν and without Lorentz forces, the solution of (1) is given by $\mathbf{U} = \mathbf{F}/2\nu$, corresponding to a stationary laminar regime. By decreasing ν , the nonlinear term $(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U}$ increases until the flow reaches a turbulent regime. The transition between the laminar and turbulent regime occurs through an oscillatory state as described in Ref. [16].

For $\mathbf{U} = \mathbf{F}/2\nu$, the solution of (2) corresponds to the Roberts dynamo solution. The large-scale magnetic field $\bar{\mathbf{B}}$ is then helicoidal and right-handed. Here $\bar{\mathbf{B}}$ is defined as the average over the horizontal directions x and y . At a given z , it is straight and aligned along one horizontal direction. The electromotive force $\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathbf{U}} \times \bar{\mathbf{B}}$ shares the same geometry. In addition, the flow symmetries lead to $\bar{\mathcal{E}} = \alpha \bar{\mathbf{B}}$, implying the following simple relation:

$$p(k, \eta) = \alpha(k, \eta)k - \eta k^2, \quad (4)$$

where the magnetic growth rate p and the ‘‘generalized’’ α effect [6] depend on the magnetic vertical wave number k and the magnetic diffusivity η . The ‘‘usual’’ α effect and

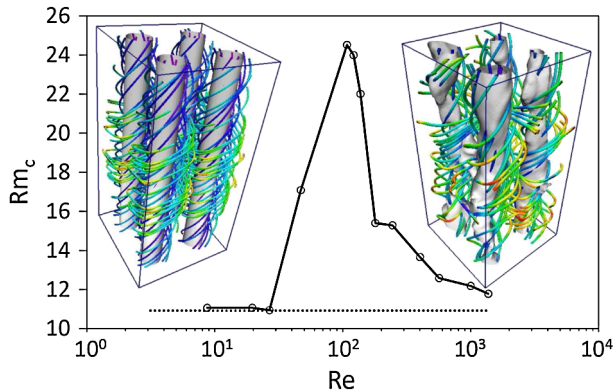


FIG. 1 (color online). Marginal curve plotted in the (Re, Rm_c) plane. The insets show snapshots of the flow current lines and mean (time-averaged) isovalues of the vorticity z component for two typical regimes: laminar (left) and fully turbulent (right) [27].

turbulent diffusivity of the mean-field theory [2] would correspond to the two first coefficients in the series expansion of $\alpha(k)$ in the limit $k \rightarrow 0$ [7].

We use a parallelized pseudospectral code in a periodic box of size $2\pi \times 2\pi \times 4\pi$. The choice of a box elongated along z corresponds to a minimum magnetic vertical wave number $k^{\min} = 0.5$, which we know [1,7] to be more dynamo unstable than $k^{\min} = 1$. Time stepping is done with an exponential forward Euler-Adams-Bashford scheme.

The marginal curve above which dynamo action occurs is plotted in Fig. 1, with $Re = U_{\text{rms}}L_{\text{int}}/\nu$ and $Rm_c = U_{\text{rms}}L_{\text{int}}/\eta$ [17]. The numerical values in the simulations are given in Table I.

At low Re , the flow is laminar and stationary, corresponding to the Roberts flow. At high Reynolds numbers, the flow is turbulent, though it has a mean (time-averaged) geometry converging towards a Roberts flow. This is illustrated in Fig. 1 in the two insets. The fact that Rm_c is almost the same for both regimes ($Rm_c \approx 11$, dotted line) suggests that it is the mean flow which plays the most important role in the field generation, even though it is about 40% less intense than the fluctuations.

This is a drastic difference with other cases like the one obtained with a von Kármán flow forcing [11,18] for which the turbulent onset is always higher than the laminar one. This stresses the robustness of scale-separation dynamos as previously noted [19]. In Ref. [16], a higher turbulent onset was found though a Roberts forcing was also used. This discrepancy comes from the fact that in Ref. [16] the periodic box was cubic, corresponding to $k^{\min} = 1$. In that case, the onset in the laminar regime is higher by a factor of about 4 [7]. Presumably, at high Reynolds numbers the mean flow is then not strong enough to sustain

TABLE I. The two first columns correspond to simulation inputs: the number of Fourier modes and viscosity. The other columns give the outputs: flow integral scale, rms velocity, mean velocity, and critical magnetic diffusivity.

$N_x \times N_y \times N_z$	ν	$L_{\text{int}}/2\pi$	U_{rms}	$\langle U \rangle$	η_c
$64^2 \times 128$	1	1	0.5	0.5	0.28
$64^2 \times 128$	0.6	1	0.83	0.83	0.47
$64^2 \times 128$	0.4	1	1.25	1.25	0.71
$64^2 \times 128$	0.3	0.88	1.45	1.45	0.73
$64^2 \times 128$	0.2	0.87	1.71	1.5	0.55
$64^2 \times 128$	0.1	0.84	2.03	1.7	0.44
$64^2 \times 128$	0.09	0.83	2.09	1.7	0.46
$64^2 \times 128$	0.08	0.83	2.12	1.67	0.5
$64^2 \times 128$	0.06	0.77	2.22	1.53	0.7
$128^2 \times 256$	0.05	0.74	2.62	1.55	0.8
$128^2 \times 256$	0.03	0.69	2.77	1.6	0.882
$128^2 \times 256$	0.02	0.65	2.77	1.6	0.9
$256^2 \times 512$	0.01	0.59	2.69	1.71	0.82
$256^2 \times 512$	0.007	0.58	2.63	1.72	0.815

dynamo action at the onset, corresponding to a small-scale dynamo rather than a large-scale one.

At intermediate values of the Reynolds number ($Re \approx 10^2$), the dynamo onset is the highest ($Rm_c \approx 25$). The clue to understand this sharp increase of Rm_c lies in the statistical properties of the flow. Indeed for such a value of Re , the mean-flow geometry does not converge [20]. This transition state is characterized by large-scale flow fluctuations or a lack of long-time coherence, which are known to decrease the dynamo efficiency and then to increase the dynamo onset [21].

At the dynamo onset, the magnetic field geometry is again helicoidal, right-handed, and of $k = 0.5$ wave number, as in the laminar kinematic Roberts dynamo. This is a serious hint for a large-scale dynamo mechanism governed by the mean flow. Thus we look for an α tensor defined by

$$\bar{\mathcal{E}} = \alpha \bar{\mathbf{B}}, \quad (5)$$

where $\bar{\mathcal{E}}$ and $\bar{\mathbf{B}}$ are two outputs of the simulation. As in the Roberts dynamo, we find that $|\bar{B}_z| \ll |\bar{B}_x|, |\bar{B}_y|$ and $|\bar{\mathcal{E}}_z| \ll |\bar{\mathcal{E}}_x|, |\bar{\mathcal{E}}_y|$, the α tensor being then reduced to four coefficients. We find $\langle \alpha_{11} \rangle \approx \langle \alpha_{22} \rangle$ and $\langle \alpha_{ij} \rangle_{i \neq j} \ll \langle \alpha_{ii} \rangle$. Just above or below the onset, we find that (4) holds for $p = \langle p \rangle$ and $\alpha = \langle \alpha_{11} \rangle$, implying $\eta_c = \langle \alpha_{11} \rangle / k$. It is another way to emphasize that the mean-field approach derived by Roberts applies at the onset even in a fully turbulent regime.

From now on, we fix the viscosity $\nu = 0.02$ ($Re \approx 570$) and decrease η from 0.85 to 0.01 ($Rm \in [13, 1100]$). The number of Fourier modes for all calculations is $128^2 \times 256$, while the length time of resolution is always larger than one diffusion time $(2\pi)^2 / \eta$.

In Fig. 2, the mean kinetic, total, and large-scale magnetic energies during the saturation phase are plotted versus Rm . Here $Rm = U_{rms} L_{int} / \eta$ with values for U_{rms} and

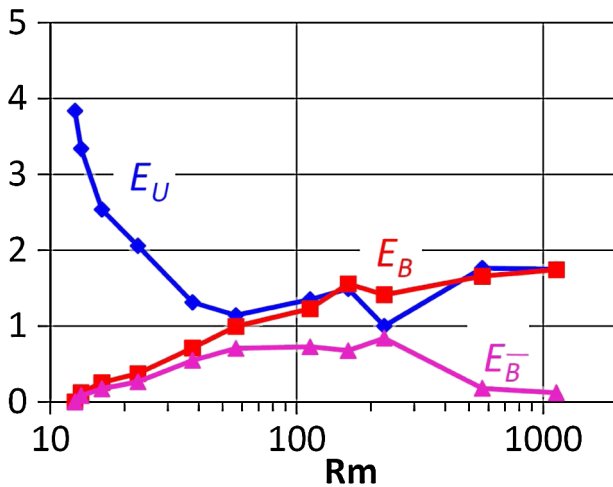


FIG. 2 (color online). Kinetic (blue line), total magnetic (red line), and large-scale magnetic (magenta line) energies versus Rm for $\nu = 0.02$ ($Re \approx 570$).

L_{int} taken from the nonmagnetic case ($U_{rms} = 2.77$ and $L_{int}/2\pi = 0.65$). Increasing Rm , we clearly see the tendency towards equipartition between kinetic and magnetic energies and an increase followed by a decrease of the large-scale magnetic energy.

During saturation, the $\bar{\mathbf{B}}$ and \mathcal{E} geometries are again helicoidal, right-handed, and of $k = 0.5$ wave number. By increasing Rm , the correlation between $\bar{\mathbf{B}}$ and \mathcal{E} is weaker than at the dynamo onset, implying a somewhat less relevant mean-field interpretation of the results. However, by solving (5) it is still possible to calculate the α_{ij} coefficients of the α tensor. Their mean values in the saturated state are plotted versus Rm in Fig. 3 [22].

The diagonal coefficients $\langle \alpha_{11} \rangle$ and $\langle \alpha_{22} \rangle$ are found to scale as $O(Rm^{-1})$ over two decades, suggesting that the large-scale dynamo mechanism operating at the dynamo onset is not the relevant one operating at high Rm . The antidiagonal coefficients α_{12} and α_{21} do not vanish, contrary to the kinematic Roberts dynamo and presumably because of a slight z dependency of the mean flow. They first increase versus Rm by a factor of 10 and then follow the $O(Rm^{-1})$ scaling for higher Rm . This is reminiscent of the catastrophic quenching in MHD turbulence [9], though here the Lorentz forces for the nonlinear saturation of the α coefficients occur mainly at the scale of the periodic box and not at smaller turbulent scales. We note that this scaling is different from the one found in the kinematic case: $\alpha = O(Rm^{-1/2})$ [6]. However, they are both compatible with (4). Indeed, in our simulations k is fixed, whereas in the kinematic case $k = O(Rm^{1/2})$ [7].

For $Rm < 200$ we find that the nonlinear saturation obeys a scenario similar to the one described in Ref. [23] in the laminar regime. The Lorentz force in addition to decreasing the mean-flow intensity modifies its geometry

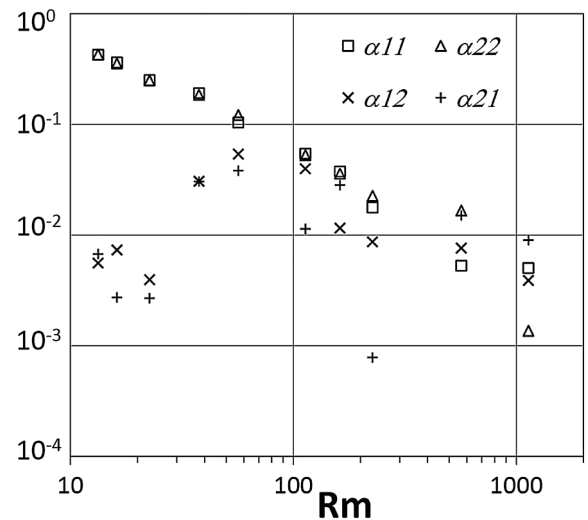


FIG. 3. The mean coefficients of the 2×2 α tensor versus Rm , in the saturated state, for $\nu = 0.02$ ($Re \approx 570$).

such that the magnetic energy saturates. For $Rm > 50$ this modified mean flow is able to generate the growth of an additional passive vector field with a phase shifted by $\pi/2$ [24]. For $Rm > 200$ this weakly nonlinear scenario does not apply anymore due to too strong nonlinearities. However, we find that a passive vector field is still growing, suggesting a small-scale dynamo mechanism [25].

In order to account for such a small-scale dynamo mechanism, we solve again Eqs. (1) and (2) but enforce $\mathbf{B} = 0$ at each time step [26], in order to suppress any possibility of a large-scale dynamo mechanism. We find a second onset at $Rm \approx 200$, corresponding to $Pm \approx 0.35$. This shows that provided Rm is high enough the magnetic field grows at small scales, the participation of the large-scale field being sufficiently weak to be neglected in the dynamo process. Still a $O(Rm^{-1})$ α effect may be calculated provided that the small-scale velocity and magnetic field are sufficiently well correlated. A weak large-scale field, enslaved to the small-scale field, may then be generated.

In conclusion, scale separation is confirmed to be a good candidate for liquid metal experiment dynamos at low Rm , the turbulence having a weak effect on the mean-flow dynamo onset. In addition, we showed that increasing Rm , but keeping $Pm < 1$, yields to small-scale dynamo action. Building an apparatus like the Karlsruhe experiment [4] but less constrained would be the cost to explore, above the onset, the competition between large-scale and small-scale dynamo modes.

We acknowledge fruitful discussions with D. Hughes, A. Gilbert, A. Courvoisier, and A. Brandenburg. Y.P. thanks A. Miniussi for computing design assistance. Computer time was provided by GENCI in the IDRIS, CINES, and CCRT facilities and the Mesocentre SIGAMM machine, hosted by the Observatoire de la Côte d'Azur.

*Franck.Plunian@ujf-grenoble.fr

- [1] G.O. Roberts, *Phil. Trans. R. Soc. A* **271**, 411 (1972).
- [2] M. Steenbeck, F. Krause, and K.-H. Rädler, *Z. Naturforsch. Teil A* **21**, 369 (1966).
- [3] F. Busse, U. Müller, R. Stieglitz, and A. Tilgner, *Magnetohydrodynamics* **32**, 235 (1996).
- [4] R. Stieglitz and U. Müller, *Phys. Fluids* **13**, 561 (2001).
- [5] A. Tilgner, *Phys. Lett. A* **226**, 75 (1997); K.-H. Rädler, M. Rheinhardt, E. Apstein, and H. Fuchs, *Nonlinear Proc. Geophys.* **9**, 171 (2002); *Magnetohydrodynamics* **38**, 41 (2002); F. Plunian and K.-H. Rädler, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **96**, 115 (2002); F. Plunian, *Phys. Fluids* **17**, 048106 (2005).
- [6] A. Soward, *J. Fluid Mech.* **180**, 267 (1987).
- [7] F. Plunian and K.-H. Rädler, *Magnetohydrodynamics* **38**, 95 (2002).
- [8] A. Courvoisier, D.W. Hughes, and S.M. Tobias, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 034503 (2006); K.-H. Rädler and A. Brandenburg, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **393**, 113 (2009).
- [9] S. Vainshtein and F. Cattaneo, *Astrophys. J.* **393**, 165 (1992).
- [10] F. Cattaneo and D.W. Hughes, *Phys. Rev. E* **54**, R4532 (1996); F. Cattaneo, D.W. Hughes, and J.-C. Thelen, *J. Fluid Mech.* **456**, 219 (2002); F. Cattaneo and D.W. Hughes, *J. Fluid Mech.* **553**, 401 (2006).
- [11] Y. Ponty, P.D. Mininni, D.C. Montgomery, J.-F. Pinton, H. Politano, and A. Pouquet, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 164502 (2005); Y. Ponty, P.D. Mininni, J.-F. Pinton, H. Politano, and A. Pouquet, *New J. Phys.* **9**, 296 (2007).
- [12] P.D. Mininni, *Phys. Rev. E* **76**, 026316 (2007).
- [13] A. Schekochihin, A. Iskakov, S. Cowley, J. McWilliams, M. Proctor, and T. Yousef, *New J. Phys.* **9**, 300 (2007).
- [14] R. Stepanov and F. Plunian, *J. Turbul.* **7**, 39 (2006); *Astrophys. J.* **680**, 809 (2008).
- [15] E.G. Blackman and A. Brandenburg, *Astrophys. J.* **579**, 359 (2002); A. Brandenburg, K.-H. Rädler, M. Rheinhardt, and K. Subramanian, *Astrophys. J.* **687**, L49 (2008); S. Sur, A. Brandenburg, and K. Subramanian, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **385**, L15 (2008).
- [16] P.D. Mininni and D.C. Montgomery, *Phys. Rev. E* **72**, 056320 (2005).
- [17] We define $U_{\text{rms}} = \langle [\int 2E(k)dk]^{1/2} \rangle$, and the integral scale $L_{\text{int}}/2\pi = \langle \int E(k)k^{-1}dk / \int E(k)dk \rangle$, where $E(k)$ is the kinetic energy spectrum and the brackets $\langle \cdot \rangle$ denote time average.
- [18] Y. Ponty, H. Politano, and J.-F. Pinton, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 144503 (2004).
- [19] P. Frick, R. Stepanov, and D. Sokoloff, *Phys. Rev. E* **74**, 066310 (2006); A. Brandenburg, *Astrophys. J.* **697**, 1206 (2009); N. Kleeorin, I. Rogachevskii, D. Sokoloff, and D. Tomin, *Phys. Rev. E* **79**, 046302 (2009).
- [20] Contrary to integral quantities U_{rms} , $\langle U \rangle$, and L_{int} , which do converge.
- [21] C. Normand, *Phys. Fluids* **15**, 1606 (2003); F. Pétrélis and S. Fauve, *Europhys. Lett.* **76**, 602 (2006); M. Peyrot, F. Plunian, and C. Normand, *Phys. Fluids* **19**, 054109 (2007); M. Peyrot, A. Gilbert, and F. Plunian, *Phys. Plasmas* **15**, 122104 (2008); S.M. Tobias and F. Cattaneo, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 125003 (2008).
- [22] During the kinematic regime the values of α_{ij} become strongly fluctuating when increasing Rm , their mean values being meaningless to calculate.
- [23] A. Tilgner and F.-H. Busse, in *Dynamo and Dynamics, A Mathematical Challenge*, edited by P. Chossat *et al.* (Kluwer, Dordrecht, 2001), p. 109.
- [24] A. Tilgner and A. Brandenburg, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **391**, 1477 (2008); M. Schrunner, D. Schmitt, R. Cameron, and P. Hoyng, *Geophys. J. Int.* **182**, 675 (2010).
- [25] F. Cattaneo and S. Tobias *J. Fluid Mech.* **621**, 205 (2009).
- [26] In spectral space, it corresponds to canceling the magnetic mode ($k_x = 0$, $k_y = 0$, $k_z = 1/2$).
- [27] Images created with the VAPOR software <http://www.vapor.ucar.edu>; P. Mininni, Ed. Lee, A. Norton, and J. Clyne *New J. Phys.* **10**, 125007 (2008).

Bibliographie

- [Alexakis 2005a] A. Alexakis, P. D. Mininni and A. Pouquet. *Imprint of Large-Scale Flows on Turbulence*. Physical Review Letters, vol. 95, no. 26, pages 264503–4, Décembre 2005. 14
- [Alexakis 2005b] Alexandros Alexakis, Pablo D. Mininni and Annick Pouquet. *Shell-to-shell energy transfer in magnetohydrodynamics. I. Steady state turbulence*. Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics), vol. 72, no. 4, pages 046301–10, Octobre 2005. 14
- [Alexakis 2007] A. Alexakis, P. Mininni and A. Pouquet. *Turbulent cascades, transfer, and scale interactions in magnetohydrodynamics*. New Journal of Physics, vol. 9, no. 8, page 298, 2007. 14
- [Alexakis 2008] A. Alexakis and Y. Ponty. *The Lorentz force effect on the On-Off dynamo intermittency*. Phys. Rev. E, vol. 77, page 056308, 2008. 17
- [Alexakis 2011] A. Alexakis. *Searching for the fastest dynamo : Laminar ABC flows*. Phys. Rev. E, vol. 84, page 026321, 2011. 44
- [Archontis 2003] V. Archontis, S. B. F. Dorch and A. Nordlund. *Numerical simulations of kinematic dynamo action*. Astronomy and Astrophysics, vol. 397, pages 393–399, 2003. 43, 44
- [Arnold 1965] V. I. Arnold. *Sur la topologie des écoulement stationnaires des fluides parfaits*. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, vol. 261, page 17, 1965. 43
- [Arnold 1983] V.I. Arnold and E.I. Korkina. *The grow of magnetic field in a incompressible flow*. Vestn. Mosk. Univ. Mat. Mekh., vol. 3, pages 43–46, 1983. 43
- [Aumaître 2005] S. Aumaître, F. Pétrélis and K. Mallick. *Low-frequency noise controls on-off intermittency of bifurcating systems*. Phys. Rev. Lett., vol. 95, page 064101, 2005. 17
- [Aumaître 2006] S. Aumaître, K. Mallick and F. Pétrélis. *Effects of the low frequencies of Noise on On-off intermittency*. Journal of Statistical Physics, vol. 123, pages 909–927, 2006. 17
- [Baerenzung 2008a] J. Baerenzung, H. Politano, Y. Ponty and A. Pouquet. *Spectral Modeling of Magnetohydrodynamic Turbulent Flows*. Phys. Rev. E, vol. 78, page 026310, 2008. 47, 120
- [Baerenzung 2008b] J. Baerenzung, H. Politano, Y. Ponty and A. Pouquet. *Spectral modeling of turbulent flows and the role of helicity*. Phys. Rev. E, vol. 77, page 04303, 2008. 47, 120
- [Baerenzung 2010] J. Baerenzung, P. Mininni, A. Pouquet, H. Politano and Y. Ponty. *Spectral modeling of rotating turbulent flows*. Phys. fluid, vol. 22, page 025104, 2010. 47, 120

- [Basdevant 1982] C. Basdevant. *Le modèle de simulation numérique de turbulence bidimensionnelle du L.M.D.* Rapport technique, Note interne LMD no 114, laboratoire de Météorologie Dynamique du CNRS, Paris, 1982. 40
- [Bayly 1988] B. J. Bayly and S. Childress. *Construction of fast dynamos using unsteady flows and maps in three dimensions.* Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., vol. 44, page 211, 1988. 43
- [Berhanu 2007] M. Berhanu, R. Monchaux, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis, A. Chiffaudel, F. Daviaud, F. Ravelet, M. Bourgoïn, Ph. Odier, J.-F. Pinton, R. Volk, B. Dubrulle and L. Marié. *Magnetic field reversals in an experimental turbulent dynamo.* Europhys. Lett., vol. 77, page 59001, 2007. 1, 31, 43
- [Berhanu 2009] M. Berhanu, B. Gallet, R. Monchaux, M. Bourgoïn, Ph. Odier, J.-F. Pinton, N. Plihon, R. Volk, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis, S. Aumaître, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle and F. Ravelet. *Bistability Between a Stationary and an Oscillatory Dynamo in a Turbulent Flow of Liquid Sodium.* Journal of Fluid Mechanics, vol. 641, pages 217–226, 2009. 1
- [Berhanu 2010] M. Berhanu, G. Verhille, J. Boisson, B. Gallet, C. Gissinger, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis, M. Bourgoïn, P. Odier, J.-F. Pinton, N. Plihon, S. Aumaître, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle and C. Pirat. *Dynamo regimes and transitions in the VKS experiment.* The European Physical Journal B, vol. 77, pages 459–468, Septembre 2010. 1
- [Bigot 2008a] B. Bigot, S. Galtier and H. Politano. *An anisotropic turbulent model for solar coronal heating.* Astronomy and Astrophysics, vol. 490, no. 1, page 13, 2008. 49
- [Bigot 2008b] B. Bigot, S. Galtier and H. Politano. *Energy Decay Laws in Strongly Anisotropic Magnetohydrodynamic Turbulence.* Physical Review Letters, vol. 100, no. 7, page 074502, Février 2008. 49
- [Boldyrev 2004] S. Boldyrev and F. Cattaneo. *Magnetic-Field Generation in Kolmogorov Turbulence.* Physical Review Letters, vol. 92, no. 14, page 144501, avril 2004. 7
- [Bourgoïn 2002] M. Bourgoïn, L. Marié, F. Pétrélis, C. Gasquet, A. Guiguon, J.-B. Luciani, M. Moulin, F. Namer, J. Burguete, F. Daviaud, A. Chiffaudel, S. Fauve, Ph. Odier and J.-F. Pinton. *MHD measurements in the von Kàrmàn sodium experiment.* Phys. Fluids, vol. 14, page 3046, 2002. 3, 5
- [Bourgoïn 2004] M. Bourgoïn, P. Odier, J.-F. Pinton and Y. Ricard. *An iterative study of time independent induction effects in magnetohydrodynamics.* Physics of Fluids, vol. 16, no. 7, pages 2529–2547, Juillet 2004. 32
- [Bourgoïn 2006] M. Bourgoïn, R. Volk, N. Plihon, P. Augier, P. Odier and J.-F. Pinton. *A Bullard - von Karman dynamo.* New Journal of Physics, vol. 8, page 329, 2006. 3, 5, 17
- [Boyd 1989] John P. Boyd. *Chebyshev and fourier spectral methods.* Springer-Verlag, 1989. 38

- [Brachet 1983] Marc E. Brachet, Daniel I. Meiron, Steven A. Orszag, B. G. Nickel, Rudolf H. Morf and Uriel Frisch. *Small-Scale Structure of the Taylor-Green Vortex*. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 130, no. -1, pages 411–452, 1983. 4, 42, 43
- [Brandenburg 2008] Axel Brandenburg, Karl-Heinz Rädler, Matthias Rheinhardt and Kandaswamy Subramanian. *Magnetic Quenching of α and Diffusivity Tensors in Helical Turbulence*. *The Astrophysical Journal*, vol. 687, pages L49–L52, Novembre 2008. 21
- [Brandenburg 2009] Axel Brandenburg. *Large scale dynamos at low magnetic Prandtl number*. *The Astrophysical Journal*, vol. 697, pages 1206–1213, Juin 2009. 21
- [Brummell 2001] N.H. Brummell, F. Cattaneo and S.M. Tobias. *Linear and non-linear dynamo properties of time-dependent ABC flows*. *Fluid Dynamics Research*, vol. 28, pages 237–265, 2001. 18
- [Busse 1996] F.H. Busse, U. Müller, R. Stieglitz and A. Tilgner. *An Experimental Investigation of the Homogeneous Dynamo-Effect*. *Magnetohydrodynamics*, vol. 32, pages 235–248, 1996. 21
- [Cadot 1997] O. Cadot, Y. Couder, A. Daerr, S. Douady and A. Tsinober. *Energy injection in closed turbulent flows : Stirring through boundary layers versus inertial stirring*. *Physical Review E*, vol. 56, no. 1, page 427, Juillet 1997. 42
- [Canuto 1988] C. Canuto, M.Y Hussaini, A. Quarteroni and T.A Zang. *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer-Verlag, 1988. 38, 40
- [Cardin 2002] P. Cardin, D. Brito, D. Jault, H.-C. Nataf and J.-P. Masson. *Towards a rapidly rotating liquid sodium dynamo experiment*. *Magnitnaya Gidrodinamika (Magnetohydrodynamics)*, vol. 38, pages 177–189, 2002. 5
- [Cardin 2008] P. Cardin and L.F. Cugliandolo. *Dynamos*, volume Session LXXXVIII, 2007 of *Les Houches - Ecole d'Été de Physique Théorique*. Amsterdam : Elsevier, 2008. 1
- [Cattaneo 1996a] F. Cattaneo, D.W. Hughes and E.J. Kim. *Suppression of chaos in a simplified nonlinear dynamo model*. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 76, pages 2057–2060, 1996. 13, 18
- [Cattaneo 1996b] Fausto Cattaneo and David W. Hughes. *Nonlinear saturation of the turbulent α effect*. *Physical Review E*, vol. 54, no. 5, pages R4532–R4535, Novembre 1996. 21
- [Cattaneo 2009] Fausto Cattaneo and Steven M. Tobias. *Dynamo Properties of the Turbulent Velocity Field of a Saturated Dynamo*. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 621, pages 205–214, 2009. 21
- [Childress 1995] S. Childress and A.D. Gilbert. *Stretch, twist fold : The fast dynamo*. Springer-Verlag, New York, 1995. 43
- [Chollet 1981] J.P. Chollet and M. Lesieur. *Parameterisation for small scales of three dimensional isotropic turbulence using spectral closure*. *J. Atmos. Sci.*, vol. 38, page 2747, 1981. 22, 47, 72

- [Christensen 2001] U. R. Christensen, J. Aubert, P. Cardin, E. Dormy, S. Gibbons, G. A. Glatzmaier, E. Grote, Y. Honkura, C. Jones, M. Kono, M. Matsushima, A. Sakuraba, F. Takahashi, A. Tilgner, J. Wicht and K. Zhang. *A numerical dynamo benchmark*. Physics of the Earth and Planetary Interiors, vol. 128, pages 25–34, 2001. 39
- [Clyne 2005a] J. Clyne and A. A. Norton. Imagery produced by vapor (www.vapor.ucar.edu), a product of the computational information systems laboratory at the national center for atmospheric research. Visualisation Software, 2005. 54
- [Clyne 2005b] John Clyne and Mark Rast. *A prototype discovery environment for analyzing and visualizing terascale turbulent fluid flow simulations*. In Proceedings of Visualization and Data Analysis 2005, January 2005. 54
- [Clyne 2007] John Clyne, Pablo Mininni, Alan Norton and Mark Rast. *Interactive desktop analysis of high resolution simulations : application to turbulent plume dynamics and current sheet formation*. New J. Phys, vol. 9, no. 301, 2007. 54
- [Cooley 1965] J. W. Cooley and J. W. Tukey. *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*. Math. Comput, vol. 19, pages 297–301, 1965. 38
- [Courvoisier 2006] Alice Courvoisier, David W. Hughes and Steven M. Tobias. *α Effect in a Family of Chaotic Flows*. Physical Review Letters, vol. 96, no. 3, page 034503, Janvier 2006. 21
- [D. Mininni Pablo 2003] Daniel O. Gomez D. Mininni Pablo and Swadesh M. Mahajan. *Dynamo action in magnetohydrodynamics and Hall-magnetohydrodynamics*. The Astrophysical Journal, vol. 587, pages 472–481, 2003. 38
- [Deville 2002] M. O. Deville, P. F. Fischer and E. H. Mund. High-order methods for incompressible fluid flow. Cambridge University Press, 2002. 39
- [Dmitruk 2011] P. Dmitruk, P. D. Mininni, A. Pouquet, S. Servidio and W. H. Matthaeus. *Emergence of very long time fluctuations and 1/f noise in ideal flows*. Physical Review E, vol. 83, no. 6, page 066318, Juin 2011. 5
- [Dombre 1986] T. Dombre, U. Frisch, J. M. Greene, M. Henon, A. Mehr and A. Soward. *Chaotic streamlines in the ABC flows*. J. Fluid Mech., vol. 167, page 353, 1986. 43
- [Dormy 1998] E. Dormy, P. Cardin and D. Jault. *MHD flow in a slightly differentially rotating spherical shell, with conducting inner core, in a dipolar magnetic field*. Earth Planet. Sci. Lett., vol. 160, pages 15–30, 1998. 39
- [Dormy 2007] E. Dormy and A. M. Soward. Mathematical aspects of natural dynamos. The Fluid Mechanics of Astrophysics and Geophysics. Grenoble Science, Université Joshep Fournier, 2007. 1

- [Douady 1991] S. Douady, Y. Couder and M.-E. Brachet. *Direct observation of the intermittency of intense vorticity filaments in turbulence*. Phys. Rev. Lett., vol. 67, page 983, 1991. 42
- [Dubrulle 2007] B. Dubrulle, P. Blaineau, O. Lopes Mafra, F. Daviaud, J.-P. Laval and R. Dolganov. *Bifurcations and dynamo action in a Taylor-Green flow*. New Journal of Physics, vol. 9, no. 8, page 308, 2007. 10, 31
- [Fauve 1993] S. Fauve, C. Laroche and B. Castaing. *Pressure fluctuations in swirling turbulent flows*. Journal de Physique II, vol. 3, no. 3, page 8, 1993. 42
- [Feng 1998] D.L. Feng, C.X. Yu, J.L. Xie and W.X. Ding. *On-off intermittencies in gas discharge plasma*. Phys. Rev. E, vol. 58, no. 3, pages 3678–3685, 1998. 17
- [Finn 1988a] J. M. Finn and E. Ott. *Chaotic flows and fast magnetic dynamos*. Phys. Fluids, vol. 31, page 2992, 1988. 43
- [Finn 1988b] John M. Finn and Edward Ott. *Chaotic flows and magnetic dynamos*. Phys. Rev. Lett., vol. 60, page 760, 1988. 43
- [Fischer 1997] P. Fischer. *An overlapping Schwarz method for spectral element solution of the incompressible Navier-Stokes equations*. J. of Comp. Phys., vol. 133, pages 84–101, 1997. 39
- [Fournier 2009] A. Fournier, D. Rosenberg and A. Pouquet. *Dynamically adaptive spectral-element simulations of 2D incompressible Navier-Stokes vortex decays*. Geophys. and Astrophys. Fluid. Dyn, vol. 103, no. 2, pages 245–268, 2009. 39
- [Frick 2002] P. Frick, V. Noskov, S. Denisov, S. Khripchenko, D. Sokoloff, R. Stepanov and A. Sukhanovsky. *Non-stationary screw flow in a toroidal channel : way to a laboratory dynamo experiment*. Magnetohydrodynamics, vol. 38 No. 1/2, pages 143–162, 2002. 3
- [Frick 2006] Peter Frick, Rodion Stepanov and Dmitry Sokoloff. *Large- and small-scale interactions and quenching in an α^2 -dynamo*. Physical Review E, vol. 74, no. 6, page 066310, Décembre 2006. 21
- [Frisch 1996] U. Frisch. *Turbulence : The legacy of a.n kolmogorov*. Cambridge University Press, 1996. 40, 51
- [Fujisaka 1984] H. Fujisaka and T. Yamada. *A New Intermittency in Coupled Dynamical Systems*. Prog. Theor. Phys., vol. 74, no. 4, pages 918–921, 1984. 17
- [Fujisaka 1986] H. Fujisaka, H. Ishii, M. Inoue and T. Yamada. *Intermittency Caused by Chaotic Modulation*. Prog. Theor. Phys., vol. 76, no. 6, pages 1198–1209, 1986. 17
- [Gailitis 2000] A. Gailitis, O. Lielausis, S. Dement'ev, E. Platācis, A. Ciferons, G. Gerbeth, T. Gundrum, F. Stefani M. Christen, H. Hanel and G. Will. *Detection of a Flow Induced Magnetic Field Eigenmode in the Riga Dynamo Facility*. Phys. Rev. Lett., vol. 84, page 4365, 2000. 1, 31

- [Gailitis 2001] A. Gailitis, O. Lielausis, S. Dement'ev, A. Cifersons, G. Gerbeth, T. Gundrum, F. Stefani M. Christen, H. Hanel and G. Will. *Magnetic Field Saturation in the Riga Dynamo Experiment*. Phys. Rev. Lett., vol. 86, page 3024, 2001. 1, 31
- [Gailitis 2004] A. Gailitis, O. Lielausis, E. Platacis, G. Gerbeth and F. Stefani. *Riga dynamo experiment and its theoretical background*. Physics of Plasmas, vol. 11 Issue 5, pages 2838–2843, 2004. 1, 5, 31
- [Galanti 1992] B. Galanti, P. L. Sulem and A. Pouquet. *Linear and non-linear dynamos associated with the ABC flow*. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., vol. 66, pages 183–208, 1992. 43
- [Galloway 1986] D.J. Galloway and U. Frisch. *Dynamo action in a family of flows with chaotic stream lines*. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., vol. 36, pages 53–83, 1986. 43
- [Galloway 1992] D.J. Galloway and M.R.E. Proctor. *Numerical calculations of fast dynamo for smooth velocity field with realistic diffusion*. Nature, vol. 356, pages 691–693, 1992. 44
- [Giannakis 2009] D. Giannakis, R. Rosner and P. Fischer. *A spectral Galerkin method for the coupled Orr-Sommerfeld and induction equations for free-surface MHD*. J Comp. Phys., vol. 228, pages 1188–1233, 2009. 39
- [Giesecke 2010] André Giesecke, Frank Stefani and Gunter Gerbeth. *Role of Soft-Iron Impellers on the Mode Selection in the von Kármán-Sodium Dynamo Experiment*. Physical Review Letters, vol. 104, no. 4, page 044503, Janvier 2010. 32
- [Gissinger 2008a] C. Gissinger. *Modèles et simulations numériques de l'effet dynamo*. Physique, l'université Pierre et Marie Curie, PARIS VI, 2008. 32, 33
- [Gissinger 2008b] C. Gissinger, A. Iskakov, S. Fauve and E. Dormy. *Effect of magnetic boundary conditions on the dynamo threshold of von Kármán swirling flows*. EPL, vol. 82, no. 2, page 29001, 2008. 32
- [Gissinger 2008c] Christophe Gissinger, Emmanuel Dormy and Stephan Fauve. *Bypassing Cowling's Theorem in Axisymmetric Fluid Dynamos*. Physical Review Letters, vol. 101, no. 14, pages 144502–4, Octobre 2008. 32
- [Gissinger 2010] C. Gissinger, E. Dormy and S. Fauve. *Morphology of field reversals in turbulent dynamos*. EPL (Europhysics Letters), vol. 90, no. 4, page 49001, Mai 2010. 33
- [Glatzmaier 1995] G.A Glatzmaier and P.H. Roberts. *A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle*. Phys. Earth Planet. Inter., vol. 91, pages 63–75, 1995. 39
- [Guermond 2003] J.L. Guermond, J. Léorat and C. Nore. *A new Finite Element Method for magneto-dynamical problems : two-dimensional results*. E. J. Mech. Fluids, vol. 22, page 555, 2003. 32

- [Guermond 2007] J.L. Guermond, R. Laguerre, J. Léorat and C. Nore. *An interior penalty Galerkin method for the MHD equations in heterogeneous domains*. J. Comp. Phys., vol. 221, pages 349–369, 2007. 32
- [Hammer 1994] P.W. Hammer, N. Platt, S.M. Hammel, J.F. Heagy and B.D. Lee. *Experimental Observation of On-Off Intermittency*. Phys. Rev. Lett., vol. 73, no. 8, pages 1095–1098, 1994. 17
- [Haugen 2004] Nils Erland L. Haugen and Axel Brandenburg. *Suppression of small scale dynamo action by an imposed magnetic field*. Physical Review E, vol. 70, no. 3, page 036408, 2004. 13
- [Heagy 1994] J. F. Heagy, N. Platt and S. M. Hammel. *Characterization of on-off intermittency*. Phys. Rev. E, vol. 49, page 1140, 1994. 17, 18
- [Herreman 2009] W. Herreman, M. Le Bars and P. Le Gal. *On the effects of an imposed magnetic field on the elliptical instability in rotating spheroids*. Physics of Fluids, vol. 21, page 046602, 2009. 5
- [Holm 2002] D. D. Holm. *Averaged Lagrangians and the mean dynamical effects of fluctuations in continuum mechanics*. Physica D, vol. 170, page 253, 2002. 48
- [Homann 2007] H. Homann, R. Grauer, A. Busse and W. C. Müller. *Lagrangian Statistics of Navier-Stokes and MHD Turbulence*. Journal of Plasma Physics, vol. 73, no. 06, pages 821–830, 2007. 35
- [Homann 2009] H Homann, O Kamps, R Friedrich and R Grauer. *Bridging from Eulerian to Lagrangian statistics in 3D hydro and magnetohydrodynamic turbulent flows*. New Journal of Physics, vol. 11, page 073020, Juillet 2009. 35
- [Iroshnikov 1963] P.S. Iroshnikov. *Turbulence of a Conducting Fluid in a Strong Magnetic Field*. Astronomicheskii Zhurnal, vol. 40, page 742, 1963. 52
- [Iskakov 2004] A.B. Iskakov, S. Descombes and E. Dormy. *An integro-differential formulation for magnetic induction in bounded domains : boundary element-finite volume method*. J. Comp. Phys., vol. 197, pages 540–554, 2004. 32
- [Iskakov 2006] A.B. Iskakov and E. Dormy. *On magnetic boundary conditions for non-spectral dynamo simulations*. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., vol. 99, pages 481–492, 2006. 32
- [John 1999] T. John, R. Stannarius and U. Behn. *On-off intermittency in stochastically driven electrohydrodynamic convection in nematics*. Phys. Rev. Lett., vol. 83, no. 4, pages 749–752, 1999. 17
- [Jones 2000] C.A. Jones and P.H. Robert. *Convection driven dynamos in a rotating plane layer*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 404, pages 311–343, 2000. 39
- [Kaneda 2003] Y. Kaneda, T. Ishihara, M. Yokokawa, K. Itakura and A. Uno. *Energy dissipation rate and energy spectrum in high resolution direct numerical simulations of turbulence in a periodic box*. Phys. Fluids, vol. 15, pages L21–L24, 2003. 40, 46, 51

- [Kaneda 2006] Y. Kaneda and T. Ishihara. *High-resolution direct numerical simulation of turbulence*. Journal of Turbulence, vol. 7, no. 20, 2006. 38
- [Kazantsev 1968] A.P. Kazantsev. *Enhancement of a magnetic field by a conducting fluid*. Sov. Phys. JETP, vol. 26, pages 1031–1034, 1968. 7
- [Kenjereš 2007a] S. Kenjereš and K. Hanjalić. *Numerical insights into magnetic dynamo action in a turbulent regime*. New J. Phys., vol. 9, page 306, 2007. 32
- [Kenjereš 2007b] S. Kenjereš and K. Hanjalić. *Numerical Simulation of a Turbulent Magnetic Dynamo*. Phys. Rev. Lett, vol. 98, page 104501, 2007. 32
- [Kleeorin 2009] Nathan Kleeorin, Igor Rogachevskii, Dmitry Sokoloff and Dmitry Tomin. *Mean-field dynamos in random Arnold-Beltrami-Childress and Roberts flows*. Physical Review E, vol. 79, no. 4, page 046302, Avril 2009. 21
- [Kraichnan 1965] R. K. Kraichnan. *Inertial-Range Spectrum of Hydromagnetic Turbulence*. Phys. Fluids, vol. 8, page 138, 1965. 52
- [Kraichnan 1968] R. K. Kraichnan. *Small-Scale Structure of a Scalar Field Convected by Turbulence*. Phys. Fluids, vol. 11, page 945, 1968. 8
- [Krause 1980a] F. Krause and K.-H. Radler. *Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory*. Pergamon, Oxford, 1980. 1
- [Krause 1980b] F. Krause and K-H Rädler. *Mean field magnetohydrodynamics and dynamo theory*. Pergamon. Press, New-York, 1980. 21
- [Krstulovic 2011] G. Krstulovic, G. Thorner, J-P Vestand, S. Fauve and M. Brachet. *Axial dipolar dynamo action in the Taylor-Green vortex*. arXiv :1109.4063, 2011. 4, 43
- [Labbé 1996] R. Labbé, J.-F. Pinton and S. Fauve. *Power Fluctuations in Turbulent Swirling Flows*. Journal de Physique II, vol. 6, no. 7, page 12, 1996. 42
- [Laguerre 2008] R. Laguerre, C. Nore, A. Ribeiro, J. Léorat, J.-L. Guermond and F. Plunian. *Impact of Impellers on the Axisymmetric Magnetic Mode in the VKS2 Dynamo Experiment*. Physical Review Letters, vol. 101, no. 10, page 104501, 2008. 32, 33
- [Laval 2006] J.-P. Laval, J.-P., Blaineau P., Leprovost N., Dubrulle B. and Daviaud F. *Influence of turbulence on the dynamo threshold*. Phys. Rev. Let., vol. 96, page 204503, 2006. 10, 22, 31
- [Lee 2010] E. Lee, M. E. Brachet, A. Pouquet, P. D. Mininni and D. Rosenberg. *Lack of universality in decaying magnetohydrodynamic turbulence*. Physical Review E, vol. 81, no. 1, page 016318, Janvier 2010. 4, 43
- [Leprovost 2006] N. Leprovost, B. Dubrulle and F. Plunian. *Intermittency in the homopolar disc-dynamo*. Magnetohydrodynamics, vol. 42, pages 131–142, 2006. 17
- [Lesieur 1996] M. Lesieur and O. Métais. *New trends in large-eddy simulations of turbulence*. Ann. Rev. Fluid Mech., vol. 28, page 45, 1996. 47

- [Lesieur 1997] M. Lesieur. *Turbulence in fluids*. Kluwer, 1997. 40, 47, 51
- [Marié 2003] L. Marié, J. Burguete, F. Daviaud and J. Léorat. *Numerical study of homogeneous dynamo based on experimental von Kármán type flows*. The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems, vol. 33, no. 4, pages 469–485, 2003. 9, 31
- [Marié 2004] L. Marié and F. Daviaud. *Experimental measurement of the scale-by-scale momentum transport budget in a turbulent shear flow*. Phys. Fluid, vol. 16, page 457, 2004. 55
- [Meneguzzi 1981] M. Meneguzzi, U. Frisch and A. Pouquet. *Growth of correlation in magnetohydrodynamic turbulence*. Phys. Rev. Lett., vol. 47, page 1060, 1981. 38
- [Meneveau 2000] C. Meneveau and J. Katz. *Scale-invariance and turbulence models for large-eddy simulation*. Annu. Rev. Fluid Mech., vol. 32, page 1, 2000. 47
- [Métais 2000] O. Métais. New trends in turbulence. turbulence : nouveaux aspects, volume Les Houches Session LXXIV 31 July - 1 September 2000 of *Les Houches - Ecole d'Ete de Physique Theorique*, chapitre Large-Eddy Simulations of Turbulence. Springer Jointly published with EDP Sciences, Les Ulis., September 2000. 47
- [Mininni 2005a] P. D. Mininni, Y. Ponty, D. C. Montgomery, J-F Pinton H. Politano and A. Pouquet. *Dynamo Regimes with a Non-helical Forcing*. The Astrophysical Journal, vol. 626, pages 853–863, 2005. 13
- [Mininni 2005b] Pablo Mininni, Alexandros Alexakis and Annick Pouquet. *Shell-to-shell energy transfer in magnetohydrodynamics. II. Kinematic dynamo*. Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics), vol. 72, no. 4, pages 046302–8, Octobre 2005. 14
- [Mininni 2005c] Pablo D. Mininni and David C. Montgomery. *Low magnetic Prandtl number dynamos with helical forcing*. Physical Review E, vol. 72, no. 5, page 056320, Novembre 2005. 21
- [Mininni 2006] P. D. Mininni. *Turbulent magnetic dynamo excitation at low magnetic Prandtl number*. Physics of Plasmas, vol. 13, no. 5, page 056502, 2006. 29
- [Minnini 2005] P. D. Minnini, D. C. Montgomery and A. Pouquet. *A numerical study of the alpha model for two-dimensional magnetohydrodynamic turbulent flows*. Phys. Fluids, vol. 17, page 035112, 2005. 48
- [Minnini 2011] P. Minnini and A. Pouquet. communication privé : L'effet "bottle-neck" ne semble pas disparaître en augmentant la résolution, mais peut être amplifié par manque de résolution., 2011. 52
- [Moffat 1985] H. K. Moffat and M. R. Proctor. *Topological constraints associated with fast dynamo action*. J. Fluid Mech., vol. 154, page 493, 1985. 43
- [Moffatt 1978] H. K. Moffatt. *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*. Cambridge University Press, 1978. 1

- [Monchaux 2007] R. Monchaux, M. Berhanu, M. Bourgoïn, M. Moulin, Ph. Odier, J.-F. Pinton, R. Volk, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle, C. Gasquet, L. Marié and F. Ravelet. *Generation of a Magnetic Field by Dynamo Action in a Turbulent Flow of Liquid Sodium*. Phys. Rev. Lett., vol. 98, page 044502, 2007. 1, 31, 43
- [Monchaux 2009] Romain Monchaux, Michael Berhanu, Sebastien Aumaitre, Arnaud Chiffaudel, Francois Daviaud, Berengere Dubrulle, Florent Ravelet, Stephan Fauve, Nicolas Mordant, Francois Petrelis, Mickael Bourgoïn, Philippe Odier, Jean-Francois Pinton, Nicolas Plihon and Romain Volk. *The von Kármán Sodium experiment : Turbulent dynamical dynamos*. Physics of Fluids, vol. 21, no. 3, pages 035108–21, Mars 2009. 1, 17, 31, 32, 33
- [Montgomery 2002] D. C. Montgomery and A. Pouquet. *An alternative interpretation for the Holm 'alpha model'*. Phys. Fluids, vol. 14, page 3365, 2002. 48
- [Müller 2000] U. Müller and R. Stieglitz. *Can the Earth's magnetic field be simulated in the laboratory ?* Naturwissenschaften, vol. 87, page 381, 2000. 1, 21, 31, 44
- [Müller 2004a] U. Müller, R. Stieglitz and F. H. Busse. *On the sensitivity of dynamo action to the system's magnetic diffusivity*. Physics of Fluids, vol. 16, page L87, 2004. 21
- [Müller 2004b] U. Müller, R. Stieglitz and S. Horanyi. *A Two-Scale Hydromagnetic Dynamo Experiment*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 498, pages 31–71, 2004. 21
- [Nataf 2006] H-C Nataf, T. Alboussière, D. Brito, P. Cardin, N. Gagnière, J-P. Masson D. Jault and D. Schmitt. *Experimental study of super-rotation in a magnetostrophic spherical Couette flow*. Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, vol. 100, pages 281–298, 2006. 5
- [Nataf 2008] H.-C. Nataf, T. Alboussière T., D. Brito, P. Cardin, N. Gagnière, D. Jault and D. Schmitt. *Rapidly rotating spherical Couette flow in a dipolar magnetic field : An experimental study of the mean axisymmetric flow*. Physics of the Earth and Planetary Interiors, vol. 170, no. 1-2, pages 60–72, 2008. 5
- [Nore 1997] C. Nore, M. Brachet, H. Politano and A. Pouquet. *Dynamo action in the Taylor–Green vortex near threshold*. Phys. Plasmas, vol. 4, page 1, 1997. 4, 43
- [Nore 2001] C. Nore, M.-E. Brachet, H. Politano and A. Pouquet. *Dynamo action in a forced Taylor-Green vortex*. Dynamo and Dynamics, a mathematical challenge, Nato Science Series II, Vol. 26, edited by P. Chossat, D. Armbruster and I. Oprea (Kluwer Academic, Dordrecht, Proceedings of the Nato Advanced Research Workshop, Cargèse, France, 21-26 August 2000, pages 51–58, 2001. 4, 42, 43

- [Nornberg 2006a] M. D. Nornberg, E. J. Spence, R. D. Kendrick and C. B. Forest. *Measurements of the Magnetic Field Induced by a Turbulent Flow of Liquid Metal*. Phys. Plasmas, vol. 13, page 055901, 2006. 3
- [Nornberg 2006b] M. D. Nornberg, E. J. Spence, R. D. Kendrick, C. M. Jacobson and C. B. Forest. *Intermittent magnetic field excitation by a turbulent flow of liquid sodium*. Phys. Rev. Lett., vol. 97, page 044503, 2006. 3
- [Noskov 2004] V. Noskov, S. Denisov, P. Frick, D. Khripchenko S. and Sokoloff and R. Stepanov. *Magnetic field rotation in the screw gallium flow*. The European Physical Journal B, vol. 41, pages 561–568, Octobre 2004. 3
- [Noskov 2009] Vitaly Noskov, Rodion Stepanov, Sergey Denisov, Peter Frick, Gautier Verhille, Nicolas Plihon and Jean-François Pinton. *Dynamics of a turbulent spin-down flow inside a torus*. Physics of Fluids, vol. 21, page 045108, 2009. 3
- [Odier 1998] P. Odier, J.-F. Pinton and S. Fauve. *Advection of a magnetic field by a turbulent swirling flow*. Phys. Rev. E, vol. 58, pages 7397–7401, 1998. 3, 4, 42
- [Orszag 1972a] S.A. Orszag. *Comparison of pseudospectral and spectral approximations*. Stud. Appl. Math., vol. 51, 1972. 38, 40, 41, 51
- [Orszag 1972b] S.A. Orszag and Jr J.S. Patterson. *Numerical simulation of three-dimensional homogeneous isotropic turbulence*. Phys. Rev. Lett., vol. 28, pages 76–79, 1972. 40
- [Ott 1994] E. Ott and J. C. Sommerer. *Blowout Bifurcations : The Occurrence of Riddled Basins and On-Off Intermittency*. Phys. Lett. A, vol. 188, page 39, 1994. 17
- [Parker 1979] E. N. Parker. *Cosmical magnetic fields*. Clarendon, Oxford, 1979. 1
- [Pasquetti 2007] R. Pasquetti, R. Bwemba and L. Cousin. *A pseudo-penalization method for high Reynolds number unsteady flows*. Applied Numerical Mathematics, vol. 33, pages 207–216, 2007. 34
- [Peffley 2000a] N. L. Peffley, A. B. Cawthorne and D. P. Lathrop. *Toward a Self-generating Magnetic Dynamo*. Phys. Rev. E, vol. 61, page 5287, 2000. 3
- [Peffley 2000b] N. L. Peffley, A. G. Goumilevski, A. B. C. and D. P. Lathrop. *Characterization of experimental dynamos*. Geoph. J. Int., vol. 142, pages 52–58, 2000. 3
- [Pétrellis 2006] F Pétrellis and S Fauve. *Inhibition of the dynamo effect by phase fluctuations*. Europhysics Letters (EPL), vol. 76, pages 602–608, Novembre 2006. 21
- [Petrelis 2007] F. Petrelis, N. Mordant and S. Fauve. *On the magnetic fields generated by experimental dynamos*. Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics, vol. 101, pages 289–323, Juin 2007. 31, 32, 33
- [Pétrellis 2009] François Pétrellis, Stéphan Fauve, Emmanuel Dormy and Jean-Pierre Valet. *Simple Mechanism for Reversals of Earth’s Magnetic Field*. Physical Review Letters, vol. 102, no. 14, page 144503, Avril 2009. 33

- [Peyret 2002] R. Peyret. Spectral method for incompressible viscous flow. Springer, 2002. 38, 40
- [Pikovsky 1984] A. S. Pikovsky. *On the interaction of strange attractors*. Z. Phys. B, vol. 55, page 149, 1984. 17
- [Pinton 1994] J.-F. Pinton and R. Labbé. *Correction to the Taylor hypothesis in swirling flows*. Journal de Physique II, vol. 4, no. 9, page 8, 1994. 42
- [Piomelli 1999] U. Piomelli. *Large-eddy simulation : achievements and challenges*. Prog. Aerosp. Eng., vol. 35, page 335, 1999. 47
- [Platt 1993] N. Platt, E. A. Spiegel and C. Tresser. *On-off intermittency : A mechanism for bursting*. Phys. Rev. Lett., vol. 70, no. 3, pages 279–282, 1993. 17
- [Platt 1994] N. Platt, S. M. Hammel and J. F. Heagy. *Effects of additive noise on on-off intermittency*. Phys. Rev. Lett., vol. 72, page 3498, 1994. 17, 18
- [Plunian 2002] F. Plunian and K.-H. Rädler. *Subharmonic Dynamo Action in the Roberts Flow*. Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics, vol. 96, pages 115–133, Janvier 2002. 21
- [Plunian 2005] Franck Plunian. *An optimal scale separation for a dynamo experiment*. Physics of Fluids, vol. 17, page 048106, 2005. 21
- [Pomeau 1980] Y. Pomeau and P. Manneville. *Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems*. Commun. Math. Phys., vol. 74, page 1889, 1980. 17
- [Ponty 1995] Y. Ponty, A. Pouquet and P.L. Sulem. *Dynamos in weakly chaotic 2-dimensional flows*. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., vol. 79, pages 239–257, 1995. 44
- [Ponty 2004] Y. Ponty, J.-F. Pinton and H. Politano. *Simulation of induction at low magnetic Prandtl number*. Phys. Rev. Lett., vol. 92, page 144503, 2004. 5, 38, 77
- [Ponty 2005] Y. Ponty, P. Minnini A. Pouquet, H. Politano, D. Montgomery and J.-F. Pinton. *Numerical study of dynamo action at low magnetic Prandtl numbers*. Phys. Rev. Lett., vol. 94, page 164512, 2005. 8, 82
- [Ponty 2007a] Y. Ponty, J.-P. Laval, B. Dubrulle, F. Daviaud and J.-F. Pinton. *Subcritical Dynamo Bifurcation in the Taylor-Green Flow*. Phys. Rev. Lett., vol. 99, page 224501, 2007. 14
- [Ponty 2007b] Y. Ponty, P. Minnini, J.-F. Pinton, H. Politano and A. Pouquet. *Dynamo action at low magnetic Prandtl numbers : mean flow versus fully turbulent motions*. New Journal of Physics, vol. 9, page 296, 2007. 8, 9
- [Ponty 2011] Y. Ponty and F. Plunian. *Transition from Large-Scale to Small-Scale Dynamo*. Phys. Rev. Lett., vol. 106, page 154502, 2011. 21, 24, 31
- [Pouquet 1976] A. Pouquet, U. Frish and J. Léorat. *Strong MHD Helical Turbulence and the Nonlinear Dynamo Effect*. J. Fluid Mech., 1976. 47

- [Pouquet 1987] A. Pouquet. Magnetohydrodynamic turbulence, chapitre 4, pages 139–227. Les Houches. Session XLVII Dynamique des fluides astrophysiques, Astrophysical fluid dynamics, 1987. 53
- [Rädler 1999] K.-H. Rädler, M. Rheinhardt, E. Apstein and H. Fuchs. *On the mean-field theory of the Karlsruhe Dynamo Experiment*. Nonlin. Processes Geophys., vol. 9, no. 3/4, pages 171–187, Novembre 1999. 21
- [Rädler 2009] K-H Rädler and A. Brandenburg. *Mean-field effects in the Galloway-Proctor flow*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 393, no. 1, pages 113–125, 2009. 21
- [Ravelet 2005] F. Ravelet, A. Chiffaudel, F. Daviaud and J. Léorat. *Toward an experimental von Kármán dynamo : Numerical studies for an optimized design*. Phys. Fluids, vol. 17, page 117104, 2005. 9, 31
- [Ravelet 2008] F. Ravelet, A. Chiffaudel and F. Daviaud. *Supercritical Transition to Turbulence in an Inertially Driven Von Kármán Closed Flow*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 601, pages 339–364, 2008. 42
- [Reigber 2005] C. Reigber, H. Lühr, P. Schwinter and J. Wickert. Earth observation with champ : results from three years in orbit. Springer-Verlag Belin Heidelberg, 2005. 3
- [Robert 1967] P. H. Robert. An introduction to magnetohydrodynamic. American Elsevier Publishig Compagny, 1967. 1
- [Roberts 1972] G. O. Roberts. *Dynamo Action of Fluid Motions with Two-Dimensional Periodicity*. Phil. Tran. R. Soc. Lond. A, vol. 271, page 411, 1972. 21, 44
- [Roberts 2000] P.H. Roberts and C.A. Jones. *The onset of magnetoconvection at large Prandtl number in a rotating layer. I. Finite magnetic diffusion*. Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, vol. 92, pages 289–325, 2000. 39
- [Rodelsperger 1995] F. Rodelsperger, A. Cenys and H. Benner. *On-off intermittency in sin-wave instabilities*. Phys. Rev. Lett., vol. 75, no. 13, pages 2594–2597, 1995. 17
- [Rosenberg 2007] D. Rosenberg, A. Pouquet and P. D. Mininni. *Adaptive mesh refinement with spectral accuracy for magnetohydrodynamics in two space dimensions*. New J. Phys, vol. 9, page 304, 2007. 39
- [S. C. Venkataramani 1995] Jr. S. C. Venkataramani T. M. Antonsen, E. Ott and J. C. Sommerer. *Characterization of on-off intermittent time series*. Phys. Lett. A, vol. 207, page 173, 1995. 17, 18
- [Sagaut 2003] P. Sagaut. Large eddy simulation for incompressible flows. 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin, 2003. 47
- [Schekochihin 2005] A. A. Schekochihin, N. E. L. Haugen, A. Brandenburg, S. C. Cowley, J. L. Maron and J. C. McWilliams. *The Onset of a Small-Scale*

- Turbulent Dynamo at Low Magnetic Prandtl Numbers*. The Astrophysical Journal, vol. 625, pages L115–L118, jun 2005. 7, 8
- [Schekochihin 2007] A. A. Schekochihin, A. B. Iskakov, S. C. Cowley, J. C. McWilliams, M. R. E. Proctor and T. A. Yousef. *Fluctuation dynamo and turbulent induction at low magnetic Prandtl numbers*. New Journal of Physics, vol. 9, no. 8, page 300, 2007. 7, 8, 30
- [Schmitt 2008] Denys Schmitt, T. Alboussière, D. Brito, P. Cardin, N. Gagnière, D. Jault and H.-C. Nataf. *Rotating Spherical Couette Flow in a Dipolar Magnetic Field : Experimental Study of Magneto-Inertial Waves*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 604, pages 175–197, 2008. 5
- [Soward 1987] A. M. Soward. *Fast Dynamo Action in a Steady Flow*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 180, pages 267–295, 1987. 21
- [Soward 1990] A. M. Soward. *A unified approach to a class of slow dynamos*. Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics, vol. 53, pages 81–107, Juin 1990. 21
- [Steenbeck 1966] M. Steenbeck, F. Krause and K.-H. Rädler. Z. Naturforsch. Teil A, vol. 21, page 369, 1966. 21
- [Stefani 2011] F. Stefani. A new liquid sodium facility for experimental studies of dynamo action and related instabilities. Communication orale au IGDR Dynamo de Cargèse, september 2011. 33
- [Stepanov 2006] R. Stepanov, R. Volk, S. Denisov, P. Frick, V. Noskov and J.-F. Pinton. *Induction, helicity, and alpha effect in a toroidal screw flow of liquid gallium*. Phys. Rev. E, vol. 73, page 046310, 2006. 3
- [Stieglitz 2001] R. Stieglitz and U. Müller. *Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo*. Phys. Fluids, vol. 13, page 561, 2001. 1, 5, 21, 31, 44
- [Sur 2008] Sharanya Sur, Axel Brandenburg and Kandaswamy Subramanian. *Kinematic α -effect in isotropic turbulence simulations*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society : Letters, vol. 385, no. 1, pages L15–L19, Mars 2008. 21
- [Sweet 2001a] D. Sweet, E. Ott, T. M. Antonsen, Jr., D. P. Lathrop and J. M. Finn. *Blowout bifurcations and the onset of magnetic dynamo action*. Physics of Plasmas, vol. 8, pages 1944–1952, 2001. 17, 112
- [Sweet 2001b] D. Sweet, E. Ott, J. M. Finn, T. M. Antonsen and Jr. D. P. Lathrop. *Blowout bifurcations and the onset of magnetic activity in turbulent dynamos*. Phys. Rev. E, vol. 63, page 066211, 2001. 17, 112
- [Teyssier 2006] R. Teyssier, S. Fromang and E Dormy. *Kinematic dynamos using constrained transport with high order Godunov schemes and adaptive mesh refinement*. J. Comp. Dyn., vol. 218, pages 44–67, 2006. 43
- [Tilgner 1995] A. Tilgner and F. H. Busse. *Subharmonic Dynamo Action of Fluid Motions with Two-Dimensional Periodicity*. Proceedings of the Royal Society

- of London. Series A : Mathematical and Physical Sciences, vol. 448, no. 1933, pages 237–244, Février 1995. 21
- [Tilgner 1997] A. Tilgner. *A kinematic dynamo with a small scale velocity field*. Physics Letters A, vol. 226, no. 1-2, pages 75–79, Février 1997. 21
- [Tilgner 2008] Andreas Tilgner and Axel Brandenburg. *A growing dynamo from a saturated Roberts flow dynamo*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 391, no. 3, pages 1477–1481, Décembre 2008. 21
- [Tobias 2008] Steven M. Tobias and Fausto Cattaneo. *Limited Role of Spectra in Dynamo Theory : Coherent versus Random Dynamos*. Physical Review Letters, vol. 101, no. 12, page 125003, 2008. 21
- [Vainshtein 1992] Samuel I. Vainshtein and Fausto Cattaneo. *Nonlinear restrictions on dynamo action*. The Astrophysical Journal, vol. 393, page 165, Juillet 1992. 21
- [Venkataramani 1996] S. C. Venkataramani, T. M. Antonsen, Jr., E. Ott and J. C. Sommerer. *On-off intermittency : Power spectrum and fractal properties of time series*. Physica D, vol. 96, page 66, 1996. 17, 18
- [Verhille 2010a] G. Verhille. *Études expérimentales en magnétohydrodynamique : effet dynamo, turbulence et induction*. Physique, École Normale Supérieure de Lyon, 2010. 32, 33
- [Verhille 2010b] Gautier Verhille, Nicolas Plihon, Mickal Bourgoïn, Philippe Odier and Jean-François Pinton. *Induction in a von Kármán flow driven by ferromagnetic impellers*. New Journal of Physics, vol. 12, no. 3, page 033006, 2010. 3, 5, 32, 33
- [Verhille 2010] G. Verhille, N. Plihon, R. Volk, M. Bourgoïn and J.-F. Pinton. *Dynamics of the Bullard - von Karman dynamo*. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., vol. 104, pages 189–205, 2010. 5
- [Vincent 1991] A. Vincent and M. Meneguzzi. *The spatial structure and the statistical properties of homogeneous turbulence*. J. Fluid Mech., vol. 225, pages 1–25, 1991. 40
- [Volk 2006] R. Volk, P. Odier and J-F Pinton. *Fluctuation of magnetic induction in von Kármán swirling flows*. Phys. Fluids, vol. 18, page 085105, 2006. 3
- [Yu 1990] L. Yu, E. Ott and Q. Chen. *Transition to chaos for random dynamical systems*. Phys. Rev. Lett., vol. 65, page 2935, 1990. 17
- [Zienicke 1998] E. Zienicke, H. Politano and A. Pouquet. *Variable intensity of lagrangian chaos in the nonlinear dynamo problem*. Phys. Rev. Lett., vol. 81, pages 4640–4640, 1998. 13, 18

Titre et Résumé

Title and Abstract

Rôle de la turbulence sur l'effet dynamo et l'induction magnétique

Résumé : L'effet des fluctuations de vitesse sur le seuil de la dynamo, de l'induction magnétique, et ainsi que des effets non linéaires présents dans le régime de saturation sont étudiés avec une sélection de huit articles. Ces thèmes ont été abordés à travers des simulations numériques dans un domaine périodique tri-dimensionnel. Des simulations numériques directes (DNS) et des méthodes de modélisation sous maille (LES) de la turbulence, ont permis de mettre en évidence l'effet des fluctuations sur le seuil et de nombreux modes de dynamo engendrés dans des écoulements entretenus par différents forçages (Taylor-Green, ABC et G.O. Robert). Dans ces systèmes MHD pendant la phase de saturation, des effets non-linéaires apparaissent, comme des bifurcations sous critiques associées à des cycles d'hystérésis, ainsi qu'un comportement de turbulence intermittente On-Off. Une discussion et des perspectives sur ces thèmes sont présentées, ainsi qu'une annexe sur les méthodes numériques et les diagnostics ayant été utilisés dans ces travaux.

Mots clef : Magnétohydrodynamique (MHD); Turbulence; Dynamo; Induction Magnétique; Simulation; Calcul intensif

Turbulence effect on the dynamo instability and the magnetic induction

Abstract : The effect of velocity fluctuations on the threshold of the dynamo effect, the magnetic induction, and also the non-linear behaviors in the saturation regime are analysed through a list of eight articles selected. These subjects are studied by numerical simulations in a three-dimensional periodic domain. Direct numerical simulation (DNS) and simulation using sub-grid scale modeling methods (LES), helped to highlight the effect of fluctuations on the threshold and many modes of dynamo in flows sustained with different forcings (Taylor-Green, ABC and G.O. Robert). In these systems in the saturation regime, non-linear effects appear, such as sub-critical bifurcations associated with hysteresis loops, and turbulent intermittent On-Off behaviors. A discussion and perspectives on these topics are presented, together with a long annexe describing the numerical methods and diagnostics that were used in this work.

Keywords : Magnetohydrodynamic (MHD); Turbulence; Dynamo, Magnetic induction; Numerical Simulation; High Performance Computing (HPC)
